Véletlen Diszkrét Struktúrák BMETE95AM39

Pete Gábor, Sztochasztika Tanszék, http://www.math.bme.hu/∼gabor

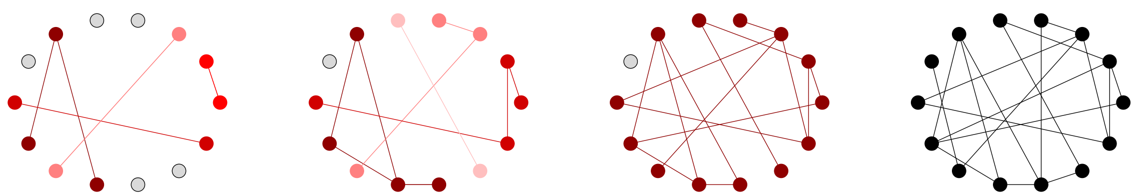
BSc, MSc, PhD szabadon választható kurzus, 2016. tavasz, Péntek 12:15-14:00

Hogyan látják a prímek a Centrális Határeloszlás Tételt? Az Erdős-Kac tétel (1940) azt mondja, hogy ha $\omega(n)$ az n egész szám különböző prímosztóinak a száma, és n-et véletlenül választjuk az $\{1, 2, \ldots, N\}$ számok közül, akkor a

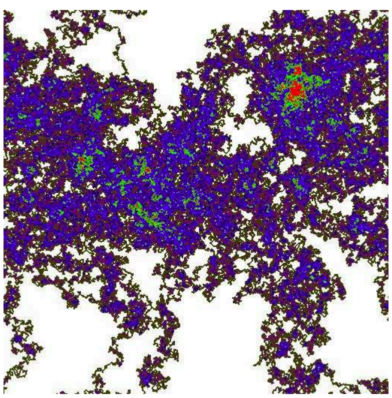
$$\frac{\omega(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}}$$

véletlen szám eloszlása a standard normálishoz tart, amint $N \to \infty$.

Valószínűségi módszer: hogyan kell érdekes gráfokat és egyéb struktúrákat konstruálni a véletlen segítségével? Egy hasznos módszerünk lesz pld a Lovász Lokális Lemma (1975).



Erdős-Rényi (1960) véletlen gráfok evolúciója. Ha n csúcs közé véletlenszerűen behúzunk egyre több élt, hány élnél kezdenek makroszkópikus méretű komponensek megjelenni? És mikor válik a gráf összefüggővé? És mekkora egy véletlen gráf kromatikus száma?



Milyen gyorsan ér haza egy véletlenszerűen bolyongó részeg ember? Hányszor kell megkeverni egy kártyapaklit? Hogyan szimuláljunk bonyolult statisztikus fizikai rendszereket? Ha bolyongunk egy gráfon, vagy általánosabban, valamilyen Markov-láncot futtatunk egy véges állapottéren, tudni szeretnénk, hogy mennyi idő után tekinthető teljesen véletlenszerűnek a helyzetünk, vagy mondjuk átlagosan mennyi idő alatt érünk el egy kiszemelt csúcsba. Ez persze függ a gráf geometriájától. Vagy attól, hogy a Markov-lánc áttérési mátrixának mik a sajátértékei. Vagy attól, hogy elektromos hálózatként tekintve a gráfra, mekkora az eredő ellenállás a csúcsok között. Itt két kulcseredmény pld Alon-Milman (1985) és Morris-Peres (2003) tételei.

Hogyan csináljunk egy 1 kilós aranygömbből két 1 kilós aranygömböt? A döbbenetesen hangzó Banach-Tarski paradoxon (1924) szerint föl lehet bontani a három-dimenziós tömör gömböt véges sok darabra úgy, hogy ezekből a darabokból kettő, az eredetivel egyező méretű, tömör gömböt össze lehet állítani. (Mondjuk ezek a közbeeső darabok annyira csúnyák, hogy nincs térfogatuk és tömegük se...) És ez bizony összefügg azzal (Kesten 1959), hogy egy reguláris fán bolyongva exponenciálisan kicsi annak a valószínűsége, hogy n lépés után a kezdeti csúcsban vagyunk.

Előfeltételek: Centrális Határeloszlás Tétel, Markov lánc, martingál, sajátérték fogalmak ismerete.

Számonkérés: Két hosszabb feladatsorból választható 4-4 darab HF beadása, a jegy 50%-áért. Szóbeli vizsga a vizsgaidőszakban, a jegy másik 50%-áért.