Félévi időbeosztás [házi feladat beadási határidőkkel]
Figyelem! Ez a file az év során változhat, pld a HF beadási határidőket a gyakvezérek esetleg módosíthatják!
Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2014 ősz

-vel kez-dődő hét	**Előadás** H 12-14 Pete Gábor	**Fizgyak** H 14-16 Vető Bálint	**Matgyak** K 12-14 Bálint Péter	**MatFizgyak** P 10-12 Szabó Botond
Szept. 8	E1	Gy1	Gy1	Gy1
Szept. 15	E2	Gy2 **[1. HF]**	Gy2 **[1. HF]**	Gy2 **[1. HF]**
Szept. 22	E3	Gy3 **[2. HF]**	**TTK dékáni szünet** **[2. HF: Sze 14-ig iroda]**	Gy3 **[2. HF]**
Szept. 29	E4	Gy4	Gy3	Gy4 **[3. HF]**
Okt. 6	E5	Gy5 **[3. HF]**	Gy4 **[3. HF]**	Gy5 **[4. HF]**
Okt. 13	E6	Gy6 **[4. HF]**	Gy5 **[4. HF]**	Gy6
				Okt. 18 szombat Gy7 **[5. HF]**
Okt. 20	E7	Gy7 **[5. HF]**	Gy6 **[5. HF]**	**Nemzeti ünnep**
Okt. 27	E8	Gy8 **[6. HF]**	Gy7 **[6. HF]**	Gy8 **[6. HF]**
Nov. 3	E9	Gy9 **[7. HF]**	Gy8 **[7. HF]**	Gy9 **[7. HF]**
Nov. 10	E10	Gy10 **[8. HF]**	**TDK konferencia** **[8. HF: Sze 14-ig iroda]**	Gy10 **[8. HF]**
Nov. 17	E11	Gy11	Gy9	**Középisk. nyílt nap**
Nov. 24	E12	Gy12 **[9. HF]**	Gy10 **[9. HF]**	Gy11 **[9. HF]**
Dec. 1	E13	Gy13 **[10. HF]**	Gy11 **[10. HF]**	Gy12 **[10. HF]**
Dec. 8	E14	Gy14 **[11. HF]**	Gy12 **[11. HF]**	Gy13 **[11. HF]**

Előadás tematika

1. Bevezető példák, Bertrand paradoxon. Eseménytér, mértékelmélet, egyszerű állítások, szita formula.
2. Feltételes valószínűség, Bayes-tétel, függetlenség.
3. Diszkrét valószínűségi változók. Várható érték, szórás.
4. Bernoulli Nagy Számok Törvénye. Poisson eloszlás approximációja binomiálissal.
5. Eloszlásfüggvények, sűrűségfüggvények, példák.
6. Folytonos várható érték, szórás, eloszlástranszformációk. Poisson folyamat.
7. Normális eloszlás, De Moivre-Laplace tétel, Stirling formula.
8. Együttes diszkrét és folytonos eloszlások. Marginális és feltételes eloszlások.
9. Független valváltozók, konvolúció, momentumgeneráló függvény. Összegek várható értéke.
10. Cauchy-Schwarz, kovariancia, korreláció. Többdimenziós eloszlástranszformációk, többdimenziós Gauss.
11. Feltételes várható érték, Steiner tétel, feltételes szórásnégyzet formula.
12. Markov és Csebisev egyenlőtlenség, NSZGYT, CHT, NSZET
13. Néhány alkalmazás CHT-re, pld közvéleménykutatások interpretálása, illetve első és második momentum módszerre, pld Galton-Watson elágazó folyamatok fázisátmenete.

Ez persze 13 pont, míg 14 előadás lesz, tehát kicsit csúszkálhatnak a témák. Minden előadás után posztolni fogom, hogy nagyjából mit végeztünk. Itt is a napló:

Előadás napló

1. Valszám alkalmazásai, és a félév fő tételeinek beharangozása. Konkrét bevezető példák, Bertrand paradoxon. Eseménytér, mértékelmélet, egyszerű állítások.

2. Két fontos megjegyzés: Lebesgue nem-mérhető halmaz létezése (lásd `http://en.wikipedia.org/wiki/Non-measura` illetve 0 mértékű de nemüres eseményekre példák. Szita-formula elemszámos és valószínűséges formája, bizonyításokkal, példával. Feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétetele, Bayes tétel, események függetlensége, mindez egy kicsit túl kevés példával.

3. A teljes függetlenség más, mint a páronkénti függetlenség. Kísérletek független elvégzésének matematikai definíciója: valószínűségi mezők szorzata. Feltételes feltételes valószínűség, feltételes függetlenség. Néhány példa: arany/ezüst színvak szomszéd, balesetokozás két különböző évben, Riemann ζ függvényre Euler formula. Valószínűségi változó: $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény. Diszkrét eloszlásokra két példa: Binom(n, p) és Geom(p). Várható érték definíciója, súlypont interpretáció.

4. Várható érték interpretációja $\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ integrálként. $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)\, \mathbb{P}[X = x]$. Ha $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ valváltozók ugyanazon téren, akkor $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$. Ha X és Y függetlenek is, akkor $\mathbb{E}[XY] = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$. Szórás két ekvivalens definíciója, és a fő motiváció, hogy miért nem $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|$-ként definiáltuk: független változók szórásnégyzete összeadódik. Példa: $\mathbb{E}[\mathrm{Binom}(n, p)] = np$ és $\mathbb{D}[\mathrm{Binom}(n, p)] = \sqrt{np(1-p)}$. Poisson$(\lambda)$ definíciója. $\mathbb{E}[\mathrm{Poi}(\lambda)] = \lambda$. A $\mathbb{P}[\mathrm{Binom}(n, \lambda/n) = k] \to \mathbb{P}[\mathrm{Poi}(\lambda) = k]$ közelítés kimondása.

5. Poisson eloszlás közelítése Binomiálissal bizonyítása. $\mathbb{R}^d$-beli Poisson(λ) pontfolyamat definíciója, és Poisson eloszlással való kapcsolata. Binom(n, p) módusza. Bernoulli Nagy Számok Törvénye. Negatív binomiális eloszlás és várható értéke.

6. Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény. Példa: egydimenziós Poisson(λ) pontfolyamat 0 utáni első pontjának eloszlása: Exponenciális(λ). Egyenletes(a, b) eloszlás. Lebesgue dekompozíció kimondása. Szinguláris eloszlásfüggvény konstrukciója a Cantor-halmaz segítségével.

7. Ahogy Binom$(n, \lambda/n)$ tart Poi(λ)-hoz, úgy az egész egydimenziós Poi(λ) folyamatot lehet diszkrét kísérletek bekövetkeztével közelíteni, amiből látszik, hogy az első sikeres diszkrét kísérlet helye, Geom$(\lambda/n)/n$ közelíti az első pontot a Poi(λ) folyamatban, aminek Expon(λ) az eloszlása. Speciálisan, Geom(p) és Expon(λ) is örökifjúak, diszkrét illetve folytonos verzióban.

   Várható érték definíciója a sűrűségfgves esetben, $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}[X > x]\, dx$ ha $X \geq 0$, továbbá $\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^\infty g(x)\, f_X(x)\, dx$ bizonyítása. Egyenletes(a, b) és Expon(λ) várhatóértékének kiszámolása és intuitív magyarázata, előbbinek szórása is. Medián definíciója és $\mathrm{med}\, X = \mathrm{argmin}_m\, \mathbb{E}|m - X|$ interpretáció. Transzformált valváltozó sűrűségfgve.

8. Stirling formula, bizonyítással. de Moivre - Laplace lokális változatának kimondása, ebből a globális változat bizonyítása, amiből az is kijön (a Bernoulli Nagy Számok Tételének $\epsilon_n \sqrt{n} \to \infty$ változatát használva), hogy egy sűrűségfgvnek kell lennie a deML-ban a φ-nek. Ezután polárkoordinátákkal megtaláltuk, hogy $1/\sqrt{2\pi}$ konstans szorzó kell az $e^{-x^2/2}$ elé, hogy sűrűségfgv legyen. Ez a standard normális eloszlás. Φ-táblázat. Néztünk példát is.

9. $N(\mu, \sigma)$ normális eloszlás. de Moivre-Laplace lokális változatának bizonyítása. Együttes avagy többdimenziós eloszlások, diszkrét és folytonos esetben, peremeloszlások. Független valváltozók együttes sűrűségfüggvénye a marginális sűrűségfüggvények szorzata: $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\, f_y(y)$.

10. Példa, hogy a marginálisok mennyire nem határozzák meg az együttes eloszlást. Poisson pontfolyamat címkézése. Diszkrét és folytonos konvolúció. Feltételes eloszlások diszkrét és folytonos esetben. Többdimenziós eloszlástrafó. Példa: egy Poisson folyamat első pozitív pontja egyenletesen helyezkedik el a 0 és a második pont között.

11. Egy többdimenziós példa: $X \sim$ Egyenletes$[0, 1]$ és $Y \mid X \sim$ Egyenletes$[0, X]$.

    Formula $\mathbb{E}g(X, Y)$-ra. Alkalmazás: indikátor valváltozók összegének módszere számláló-változók várható értékének kiszámolására. Példák: Hipergeom, és véletlen permutáció fixpontjainak X_n száma, a szita meglibbentésével, hogy akár ki is lehetne számolni, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = 0] = 1/e$.

    Kovariancia és korrelációs együttható definíciója, alaptulajdonságokkal. Cauchy-Schwarz bizonyítása, és az implikáció, hogy $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$, szélsőértékeket akkor fölvéve, ha $Y = aX + b$, ahol $a > 0$ vagy $a < 0$ konstans.

12. Két példa a korreláció kiszámolására és alkalmazására, a múltkoriak folytatása: $X \sim \mathsf{Egyenletes}[0,1]$ és $Y \mid X \sim \mathsf{Egyenletes}[0,X]$ korrelációja $\sqrt{3/7}$, illetve véletlen permutáció X_n fixpont-számának szórása 1. Ezek után nem meglepő, hogy $X_n \to \mathsf{Poi}(1)$ eloszlásban.

    Normálisok konvolúciója normális. Alkalmazás: egy de Moivre Laplace-os példa. Többdimenziós normális eloszlás definíciója sűrűségfüggvénnyel, és a két fő állítás kimondása: 1) egy együttes normális pontosan a standard többdim normális affin transzformáció melletti képe 2) a kovariancia-mátrix leolvasása a sűrűségfüggvényből.

13. A két fenti többdim normális állítás bizonyítása, egy példával. Feltételes várható érték. Toronyszabály. Feltételes szórásnégyzet formula. Steiner tétel. Mindenféle példák.

14. Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség. Nagy Számok Gyenge Törvénye, bizonyítással (véges szórást föltéve). Erős Törvény kimondása. Egy példa a valószínűségben való és a majdnem biztos konvergencia különbségére.

    Momentumgeneráló függvény definíciója, alaptulajdonságai, példák. Eloszlásban való konvergencia definíciója, korábbi példákra emlékeztetés. Momentumgeneráló inverziójának lehetősége és eloszlásban való konvergencia bizonyitására való használhatóságának kimondása, bizonyítás nélkül.

    Centrális Határeloszlás Tétel, bizonyítással (momentumgeneráló függvény létezését föltéve). CHT-alkalmazás helyett közkívánatra egy kétdimenziós feltételes várhatóértékes példa, de vizsgán már lesz CHT-alkalmazás!

HF feladatsor témák

Ez csak körülbelüli iránymutató. Az előadás menetétől függően a témák esetleg vándorolhatnak, régebbi témák mindig visszatérhetnek, a fő csapásiránytól eltérő érdekességek fölbukkanhatnak.

1. Alapvető kombinatorika, szita-formula, eseménytér, egyenlő valószínűségű események
2. Feltételes val., Bayes tétel, (feltételes) függetlenség
3. Diszkrét valváltozók 1. Binomiális, geometriai, negatív binom, hipergeom.
4. Diszkrét valváltozók 2. Várható érték és szórás, Poisson eloszlás
5. Poisson folyamat, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, esetleg egyenletes eloszlás

    (ZH1 itt)

6. Egyenletes eo, normális eloszlás, binomiális és Poisson eloszlás normális approximációja, deMoivre-Laplace
7. Exponenciális eloszlás, Poisson folyamat megint, Cauchy és lognormális eloszlás, eloszlástranszformációk
8. Diszkrét és folytonos együttes eloszlások, többdimenziós eloszlástranszformációk
9. Többdimenziós eloszlástranszformációk, függetlenség és konvolúció, feltételes eloszlások, feltételes várható érték
10. Összegek várható értéke, szórása, kovarianciák, korrelációk, indikátorok összege
11. Többdimenziós normális és korrelációi (ez talán átcsúszhat az utolsó gyakra)

    (ZH2 valószínűleg itt)

12. Utolsó gyakorlaton meglátjuk, lehet csak gyakorlás, vagy esetleg Erdős-Rényi, vagy lineáris regresszió, izlés szerint.

Ajánlott irodalom

Az elsődleges forrás, amit az elődások beosztása is viszonylag pontosan követ, a Balázs Márton – Tóth Bálint jegyzet. Más könyvjavaslatokkal együtt a kurzus honlapján megtalálható:
`http://www.math.bme.hu/~gabor/oktatas/Vsz2013/Vsz2013.html`.

Házi feladatok

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2014 ősz

A feladatok közül minden héten a beadandó házi feladatok meg vannak jelölve, ezek 2 (••) vagy 3 pontot (•••) érnek, összesen 10 pont értékben. Természetesen gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is. Egyes heteken szerepelnek bónuszfeladatok, ezek darabonként 3 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól, ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket. A házi feladatok beadási határideje az első oldalon szerepel.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az *igazi* csoportmunka hasznos, de ebben az esetben mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

1. HF:

1.1 Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve értelmesen kiolvasható lesz (abrakadabramississippi vagy fordítva)?

1.2 **a)** Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?

b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?

c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?

d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

1.3 Egy tánciskolába 12 hölgy és 13 úriember jár. Ha 6 hölgyet és 6 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

1.4 Egy társaság 8 nőből és 7 férfiból áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha

a) van két férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni,

b) van két nő, akik nem hajlandók egy bizottságban dolgozni,

c) van egy nő és egy férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni?

1.5 Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

1.6 **a)** Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára olymódon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

b) Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

– válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,

– válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

c) A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3\binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

1.7 Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

a) Határozzuk meg, hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.

b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?

c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?

d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

1.8 **a)** Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{ha } \mathbf{P}\{A\} \geq 0.8 \text{ és } \mathbf{P}\{B\} \geq 0.6, \text{ akkor } \mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.9 n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres, ha

a) a golyók megkülönböztethetőek,

b) a golyók megkülönböztethetetlenek?

1.10 ••• Egy régi vágású színházban a fogasra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik. Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában? Hogyan viselkedig ez a valószínűség aszimptotikusan amint $n \to \infty$?

1.11 Egy közösségben 20 család van: 5 családban egy gyerek van, 7 családban kettő, 4 családban három, 3 családban négy, 1 családban öt.

a) Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

b) Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

1.12 Egy erdőben 18 őz lakik, közülük 5 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 4-et befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?

1.13 •• Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, 3, 4$?

Bónusz: Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, \ldots, n$?

1.14 Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.

a) Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1, f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)

b) Határozzuk meg P_n-t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.

1.15 Egy urnában van 6 piros, 6 fehér, és 7 kék golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?

1.16 Anna, Bori és Cili egyforma erejű pingpongjátékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll, és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel… Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Ezt mindaddig folytatják, amíg nem nyer valamelyikük kétszer egymás után, ő lesz a körmérkőzés győztese. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

1.17 ••• Anna, Bori és Cili most érmét dobálnak, felváltva egymás után, Anna kezd, majd Bori dob, aztán Cili, majd megint Anna, és így tovább. Ezt mindaddig folytatják, míg valaki fejet nem dob.

a) Írjuk le az eseményteret!

b) Írjuk le az alábbi eseményeket az eseménytéren: $A = \{$ Anna nyer $\}$, $B = \{$ Bori nyer $\}$, $(A \bigcup B)^c$!

1.18 A lóversenyen 7 ló indul. Jelölje C azt az eseményt, hogy Csillag az első három hely valamelyikén ér be, R pedig azt, hogy Ráró a 2. helyen végez. Mennyi $C \bigcup R$ valószínűsége? Hány elemi eseményt tartalmaz $C \bigcup R$?

1.19 Kiosztunk egy pakli jól megkevert francia kártyát. Mi a valószínűsége, hogy

a) a pikk ász a 14. kiosztott lap?

b) az első kiosztott ász a 14.-ként kiosztott lap?

c) az első négy lap különböző színű?

d) az első négy lap különböző figurájú?

1.20 •• Van két kockánk, amelyeket azonos módon színeztünk ki: két lapot pirosra, kettőt zöldre, egyet pedig sárgára, a maradék fehér. Ha feldobjuk őket egyszerre, mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan színűre esnek? Mi a valószínűsége annak, hogy az első két feldobásra különböző színűek lesznek, majd harmadszorra ugyanolyanok?

1.21 6 férfit és 6 nőt véletlenszerűen két csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két csoportban 3–3 nő, illetve férfi lesz?

Bónusz: Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

a) nincsen teljes pár,

b) pontosan egy teljes pár van,

c) pontosan két teljes pár van?

2. HF:

2.1 Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyiken hatos van?

2.2 Egy piros, egy kék, és egy sárga szabályos kockával dobunk. Legyen az általuk mutatott három szám rendre P, K, S.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás különböző?

b) Feltéve, hogy mindhárom dobás különböző, mi a valószínűsége, hogy $P < K < S$?

c) Mennyi $\mathbf{P}\{P < K < S\}$?

2.3 •• Vigyázat! Ebben a feladatban attól függően, milyen kísérlettel modellezzük a „véletlenszerű én" és a „véletlenszerű király" kiválasztását, különböző eredményeket kaphatunk. A megoldás része az is, hogy írd le, milyen kísérletben gondolkodtál és milyen feltevésekkel éltél.

a) Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?

b) A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

2.4 Két golyó mindegyike egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel feketére vagy aranyszínűre lett festve, majd egy urnába helyezték őket.

a) Tegyük fel, hogy tudomásunkra jut, hogy az aranyszínű festéket használták, azaz legalább az egyik golyó aranyszínű lett. Ekkor mi a feltételes valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

b) Most tegyük fel, hogy az urna megbillent, az egyik golyó kigurult belőle, és azt látjuk, hogy ez a golyó aranyszínű. Ekkor mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

Magyarázzuk meg a válaszunkat.

2.5 •• Három szakács, A, B és C, egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. A rossz sütemények hány százalékát sütötte A?

2.6 Egy első- és másodévesek által látogatott tárgyat 8 elsőéves fiú, 6 elsőéves lány, 4 másodéves fiú vett fel. Hány másodéves lány vette fel a tárgyat, ha tudjuk, hogy egy, a tárgy hallgatói közül véletlenül választott hallgató neme és évfolyama független egymástól?

2.7 Egy genetikai rendellenesség a magzatok fél százalékát érinti. Egy „megbízhatónak számító” diagnosztikai eljárás a meglévő rendellenességet biztosan detektálja, míg rendellenesség hiányában 95% valószínűséggel a helyes negatív választ adja, 5% valószínűséggel pedig a hibás pozitív választ. Ha az eljárás erdeménye pozitív, mi a valószínűsége, hogy magzatunknak tényleg megvan a rendellenessége?

2.8 ••• Tegyük fel, hogy szabályos fej-írás dobást szeretnénk generálni, de csak egy cinkelt érme áll rendelkezésünkre, amely általunk ismeretlen p valószínűséggel mutat fejet. Tekintsük a következő eljárást.

(a) Feldobjuk az érmét.
(b) Megint feldobjuk az érmét.
(c) Ha mindkét dobás eredménye fej, vagy mindkét dobás eredménye írás, akkor újrakezdjük az első lépéssel.
(d) Ha viszont a két dobás eredménye különböző, akkor az utolsó eredmény lesz az algoritmus kimenete.

a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyforma valószínűséggel szolgáltat fejet vagy írást.
b) Lehetne-e úgy egyszerűsíteni az eljárást, hogy addig dobjuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást tekintjük?

2.9 ••• Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \subseteq B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (*Tipp: tekintsük az eredeti halmaz minden egyes elemét.*)
b) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \cap B = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2.10 Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik. Mutassuk meg, hogy A, B és C páronként függetlenek, de nem függetlenek.

2.11 Az időjárás-előrejelzés egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy az idő vagy esős, vagy napos, és p annak a valószínűsége, hogy holnap ugyanolyan lesz mint ma, a korábbi napoktól függetlenül. Ha az idő napos január elsején, legyen P_n annak valószínűsége, hogy n nap múlva szintén napos. Mutassuk meg, hogy P_n kielégíti a

$$P_n = (2p-1)P_{n-1} + (1-p), \qquad n \geq 1; \qquad P_0 = 1$$

rekurziót. Bizonyítsuk be, hogy $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$ minden $n \geq 0$ esetén.

Bónusz: Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebességgel próbál menekülni. A vadász 3 másodpercenként újratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tűnik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság négyzetével fordítottan arányos, a következő képlet szerint:

$$\mathbf{P}\{\text{a vadász eltalálja az } x \text{ méter távolságban levő rókát}\} = 675x^{-2} \qquad (x \geq 30).$$

Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka $1/4$ valószínűséggel túléli. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?
(*Tipp: Analízisből tudjuk, hogy ha* $0 < \varepsilon_n < 1$ *minden* n*-re, akkor* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n) > 0$ *pontosan akkor, ha* $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty$.)
Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért rossz modellje ez a rókavadászatnak?

2.12 Iszákos Iván a nap $2/3$ részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

2.13 Móricka és Pistike pingpongoznak. Minden játszmát a többitől függetlenül Móricka p, Pistike pedig q valószínűséggel nyer meg, ahol $p > 0$, $q > 0$ és $p + q = 1$. A játék akkor ér véget, ha valaki két egymás utáni játszmát megnyer.

a) Mi a valószínűsége, hogy Móricka nyeri az utolsó játszmát?

b) Mi a valószínűsége, hogy ugyanaz nyeri az első játszmát, mint az utolsót?

c) Ha tudjuk, hogy az utolsó játszmát Móricka nyerte, mennyi a valószínűsége, hogy az elsőt is?

2.14 Egy televíziós vetélkedőben a játékosnak három ajtó közül kell választania, és a mögötte elrejtett nyereményt kapja jutalmul. Az egyik ajtó mögött egy luxusautó található, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske. Mikor a játékos kiválasztott egyet a háromból, a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, ami mögött kecske van, és felajánlja, hogy a játékos még megváltoztathatja a döntését. Érdemes-e áttérni a másik ki nem nyitott ajtóra? Mekkora valószínűséggel nyerjük meg így az autót?

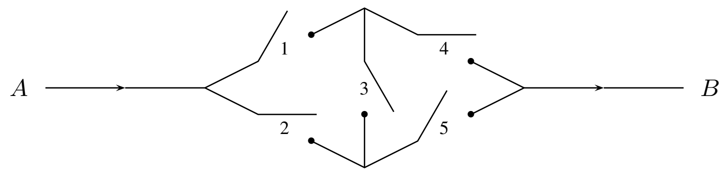
2.15 n dobozban elhelyezünk N golyót úgy, hogy mind az n^N elhelyezés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége annak, hogy K golyó esik bele?

Bónusz: Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudósak: átlagosan az esetek 2/3-ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen.
Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.
Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott? (Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mindott Béla, Béla tudja, hogy mit mindott Cili, Cili tudja, hogy mit mindott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

2.16 Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok, az $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ elemeivel számozott, golyónk. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \dots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \dots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt 2^{-n} perccel fogjuk az $10n+1, 10n+2, \dots, 10(n+1)$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjfélig. Bizonyítandó, hogy éjfélkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.

3. HF:

3.1 Alább egy áramkör, ahol mindegyik kapcsoló egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel van nyitva vagy zárva.



Mi a valószínűsége, hogy A-tól B-ig áram folyhat ezen az áramkörön? (Ezért itt külön nem jár pont, de érdekes: válaszoljunk számolás nélkül is, szimmetriák segítségével! (Persze ha valaki ezt helyesen megcsinálja és nem számol, az is teljes értékű megoldás.))

3.2 50 százalék az esélye, hogy a királynő hordozza a hemofíliáért felelős gént. Ha hordozó, akkor mindegyik hercegnek 50-50 százalék az esélye arra, hogy hemofíliás legyen. Ha a királynő három fia nem hemofíliás, mekkora az esélye annak, hogy a királynő hordozó? Ha születik egy negyedik herceg is, mekkora az esélye annak, hogy hemofíliás lesz?

3.3 5 férfit és 5 nőt rangsorolnak egy vizsgán. Tegyük fel, hogy nincs két egyforma pontszám, és mind a 10! elrendezés egyformán valószínű. Legyen X a legjobb nő helyezése (például $X = 1$ azt jelenti, hogy a legjobb vizsgázó egy nő). Határozzuk meg X eloszlását és várható értékét.

3.4 Öt játékos, A, B, C, D, E között véletlenszerűen szétosztjuk a számokat 1-től 5-ig, ismétlődés nélkül. Először A és B mérkőzik: akinek magasabb a száma, továbbjut. Az így továbbjutó most C-vel mérkőzik, azután a közülük továbbjutó D-vel, majd az itt nyertes E-vel. Legyen X az a szám, ahány mérkőzést A nyer. Határozzuk meg X eloszlását.

3.5 •• Egy családban $n \geq 1$ gyermek αp^n valószínűséggel van, ahol $\alpha \leq (1-p)/p$.

a) A családok hányadrészében nincs gyermek?

b) Ha a gyermekek egymástól függetlenül egyforma eséllyel fiúk és lányok, akkor a családok hányadrészében lesz pontosan k fiú (és tetszőleges számú lány)?

Bónusz: Hamis érmével dobunk, de nem tudjuk, hogy mennyire torzít az érme. Előzetesen annyit elárult nekünk a torz-érme gyár, hogy egyenletesen torzítják az érméket, vagyis mindenféle $p \in [0, 1]$ egyenletesen fordul elő. Az első írást n.-szerre dobtuk (addig csupa fejet). Mit tippelünk, mekkora a p? (Mi a legvalószínűbb p?) Alulról illetve felülről (0-tól c-ig illetve c-től 1-ig) mekkora intervallumnak van már elég nagy (mondjuk 0.95-ös) valószínűsége, hogy oda esik a p?

3.6 Az α kockának 4 piros és 2 fehér, míg a β kockának 2 piros és 4 fehér lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha fej a dobás eredménye, akkor a továbbiakban az α kockát használjuk, ha pedig írás akkor a β-t. Az így kiválasztott kockával egymásután n-szer dobunk.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobásnál az eredmény piros? ($k = 1, 2, \ldots, n$)

b) Feltéve, hogy mind az első $k - 1$ kockadobás eredménye piros, mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás eredménye is piros lesz? ($k = 1, 2, \ldots, n$)

3.7 Egy ketyere két különböző okból romolhatott el. Az első ok ellenőrzése E_1 forintba kerülne, és ha valóban az a probléma, akkor a javítása J_1 forint. Hasonlóan, a második ok ellenőrzése E_2 forintba kerül, és ha az a probléma, akkor a javítás J_2 forint. (Ha viszont az először ellenőrzött oknál nincs probléma, akkor a másik lehetséges okot először ellenőriznünk kell, majd javítanunk.) Legyen p és $1 - p$ annak valószínűségei, hogy a ketyere az első illetve a második okból romlott el. Határozzuk meg, mely E_1, E_2, J_1, J_2, p értékek mellett érdemesebb várhatóan az első okkal kezdeni az ellenőrzést, és melyeknél a második okkal.

3.8 ••• A Magyar Etikett Intézet felmérése szerint Magyarországon a fiúk két kategóriába oszthatóak: 2/3-uk udvarias, 1/3-uk udvariatlan. Az udvarias fiúk az esetek 90%-ában engedik előre a lányokat az ajtóban, az udvariatlanok viszont csak az esetek 20%-ában. Láttam, hogy Jancsi előre engedte Juliskát, Jutkát viszont nem.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jancsi az udvariatlan kategóriába tartozik?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek után Jancsi Erzsit is előre fogja engedni?

3.9 Sárkányföldön az n fejű sárkány

$$p_n = \binom{6}{n-1} \cdot 0.7^{n-1} \cdot 0.3^{7-n}$$

valószínűséggel fordul elő ($n = 1, 2, \ldots, 7$). Egy sárkány fejeinek levágása veszélyes művelet: az ember minden fejét egymástól függetlenül 90% eséllyel tudja levágni, és ha ez nem sikerül, akkor a sárkány megeszi az embert.

a) Elém kerül egy sárkány, de a nagy ködben nem látom, hogy hányfejű. Mi az esélye, hogy túlélem a találkozást?

b) Tegyük fel, hogy épp most vágtam le a hatodik fejét, de még mindig nem látom, hogy maradt-e feje. Ilyen helyzetből mekkora valószínűséggel élem túl a harcot?

c) Csata után találkozom a cimborámmal, aki szintén legyőzött egy sárkányt. Ezt figyelembe véve mi a valószínűsége, hogy hétfejűvel volt dolga?

3.10 Két dobókockát dobálunk, és mindig az összeget tekintjük.

a) Addig dobunk, míg a két kockán lévő pöttyök összege 7 nem lesz. Mi a valószínűsége, hogy nem dobtunk előtte 11-et?

b) Most addig dobunk, míg a dobott összeg 7 vagy 11 nem lesz. Mi a valószínűsége, hogy amikor megállunk, 7 az összeg?

c) Lássuk be, hogy a dobások száma a b) feladatban és az, hogy mennyi az összeg megálláskor, függetlenek.

3.11 ••• Amerikában egy esküdtszék elítéli a vádlottat, ha a 12 esküdtből legalább 8 bűnösnek szavazza a vádlottat. Ha minden esküdt θ valószínűséggel dönt helyesen, akkor mi a valószínűsége a helyes döntésnek? Tegyük fel, hogy a vádlott p valószínűséggel bűnös valójában.

3.12 Kaszinóban az alábbi játékot játszuk: Minden lépésben fogadunk előre az $i = 1, 2, \ldots, 6$ számok valamelyikére, majd feldobnak 3 kockát. Ahányszor kijött a fogadott számunk, annyi petákot kapunk, ellenben fizetnünk kell 1 petákot, ha egyszer sem jött ki a fogadott szám. Fair-e a játék?

3.13 •• Egy n komponensű rendszer alkatrészei egymástól és a múltjuktól is függetlenül minden nap p valószínűséggel meghibásodnak, de ezeket esténként kijavítjuk. A rendszer leáll, ha legalább k alkatrész meghibásodott. Mi annak a valószínűsége, hogy először a t. napon áll le a rendszer?

3.14 Pólya urna: Egy urnában kezdetben a piros és b kék golyó van. Minden egyes lépésben kihúzunk egy golyót, megnézzük, milyen színű, majd őt és egy vele megyegyező színű golyót visszateszünk. (Vagyis a golyók száma az urnában minden lépésben eggyel nő). A t. lépéskor mi annak a valószínűsége, hogy kék golyót húzunk?

4. HF:

4.1 4 buszon összesen 148 tanuló utazik. Az egyes buszok rendre 40, 33, 25 és 50 tanulót szállítanak. Válasszunk ki véletlenszerűen egy tanulót; ekkor jelölje X azt, hogy hány tanuló utazik azon a buszon, amelyik a kiválasztott tanulót szállítja. Válasszunk véletlenszerűen egy sofőrt. Y jelölje azt, hogy a sofőr buszán hány tanuló utazik.

a) Mit gondolunk, X vagy Y várható értéke nagyobb? Miért?

b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X)$-et és $\mathbf{E}(Y)$-t!

c) Számoljuk ki $\mathbf{D}^2(X)$-et és $\mathbf{D}^2(Y)$-t is!

4.2 •• Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke?

4.3 A és B a következő játékot játssza: A gondol 1-re vagy 2-re, ezt leírja, majd B-nek ki kell találnia, melyik számra gondolt A. Ha az A által leírt szám i és B jól tippelt, akkor B i egységet kap A-tól. Ha B melléfog, akkor ő fizet A-nak $\frac{3}{4}$-t. Ha B randomizálja tippjét, azaz p valószínűséggel tippel 1-re és $1-p$ valószínűséggel 2-re, határozzuk meg nyereménye várható értékét, amennyiben

a) az A által leírt szám az 1,

b) az A által leírt szám a 2.

Milyen p érték maximalizálja B minimális várható nyereményét, és mi ez a maximin érték? (Figyeljük meg, hogy B várható nyereménye nem csak p-től függ, hanem attól is, hogy mit csinál A.)
Tekintsük most az A játékost. Tegyük fel, hogy ő is randomizálja a döntését, és q valószínűséggel gondol 1-re. Mennyi A várható vesztesége,

a) ha B 1-re tippel, ill.

b) ha B 2-re tippel?

Mely q értékkel tudja A minimalizálni a maximális várható veszteségét? Mutassuk meg, hogy A maximális várható veszteségének minimuma egyenlő B minimális várható nyereségének maximumával! Ezt az eredményt hívják minimax tételnek, ami a játékelmélet egyik alapvető eredménye, és általánosan először Neumann János fogalmazta meg. A közös értéket a játék értékének hívják (B számára).

4.4 Egy gép véletlenszerűen választ 1 és 10 közötti számot, amit nekünk kell kitalálni, úgy, hogy kérdéseket teszünk fel, amire a gép igennel vagy nemmel válaszol. Számoljuk ki, várhatóan hány kérdést kell a gépnek feltennünk,

a) ha csak rákérdezhetünk, azaz azt kérdezzük, hogy „A gondolt szám i?” $i = 1, 2, \ldots,$ 10, illetve

b) ha kérdéseinkkel mindig megpróbáljuk megfelezni a fennmaradó lehetséges számok körét.

4.5 **(Szentpétervári paradoxon)** Egy érmével addig dobunk, míg a fej oldalára nem esik. Ha az n-edik feldobás eredménye fej, akkor a játékos 2^n forintot nyer. Mutassuk meg, hogy a nyeremény várható értéke végtelen!

a) Megéri-e egy játékért 1 millió forintot fizetni?

b) Megéri-e játékonként 1 millió forintot fizetni, ha annyiszor játszunk, ahányszor csak akarunk, és csak az összes játék befejezése után van elszámolás?

4.6 ••• Minden este több különböző meteorológus jósolja meg, mekkora valószínűséggel fog holnap esni az eső. Hogy megítéljük, mennyire jók a meteorológusok, a következőképpen pontozzuk őket: ha egy meteorológus p valószínűséggel jósolt esőt, akkor

$$\begin{array}{ll} 1-(1-p)^2 & \text{pontot kap, ha valóban esik másnap,} \\ 1-p^2 & \text{pontot kap, ha nem esik.} \end{array}$$

Ezek után egy rögzített időszakban mérjük az egyes meteorológusok átlagpontszámát, és a legjobb előrejelző a legmagasabb pontszámot kapott meteorológus lesz. Tegyük fel, hogy az egyik meteorológus tudja ezt, és maximalizálni szeretné átlagát. Ha azt gondolja, hogy p^* valószínűséggel fog esni holnap, mekkora p értéket érdemes jelentenie?

4.7 Egy embernek n kulcsa van, amelyek közül egyetlen egy nyit egy bizonyos ajtót. Emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét, ha

a) a sikertelen kulcsokat nem zárja ki a további próbálkozások során (visszatevéses húzások),

b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli húzások).

4.8 Egymás után tízszer dobunk egy szabályos érmével. Legyen X az egymás utáni egyforma kimenetelekből álló sorozatok száma, vagyis pl. csupa fej esetén $X = 1$, a $FFIIIIFIFF$ sorozatnál pedig $X = 5$. Határozzuk meg X eloszlását.

4.9 Két kockával (egyik piros, másik zöld) dobva, mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke? Dobtam a két kockával, háromszor: az egyik kockát, a pirosat mindig meglestem, hihetetlen, de mindháromszor 3-as szerepelt rajta. Mi a valószínűsége, hogy legalább egyszer nagyobb volt, mint a zöldön lévő, éppen akkor dobott szám?

Bónusz: n darab k-lapú „kockával” dobva mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke?

4.10 •••

a) Kétszer dobunk egy hamis érmével, amin a fej valószínűsége $5/9$. Jelölje X a fej dobások számát. Számoljuk ki X várható értékét és szórását!

b) Háromszor dobunk egy hamis érmével, amin a fej valószínűsége $2/3$. Jelölje U azt a számot, ahányszor sikerül az előző dobást megismételnünk. (Így U értéke 0, 1 vagy 2 lehet.) Számoljuk ki U várható értékét és szórását!

4.11 Legyen $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, számoljuk ki

a) $\mathbf{E}(2 + X)^2$-t és

b) $\mathbf{D}^2(4 + 3X)$-t.

4.12 N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i).$$

(*Tipp:* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{k=i}^{\infty} \mathbf{P}(N = k)$. *És most szummacsere!*)

4.13 N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}(N > i) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N)\big).$$

4.14 Egy m családból álló közösségben n_i családban van i gyerek ($\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = m$). Legyen X egy véletlenszerűen választott családban a gyerekek száma. Válasszunk ki véletlenszerűen a $\sum\limits_{i=1}^{r} in_i$ gyerek közül egyet; jelölje Y azt, hogy a kiválasztott gyerek családjában hány gyerek van. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(Y) \geq \mathbf{E}(X)$.

4.15 Egy államban az öngyilkossági ráta 1 öngyilkosság per 100 000 lakos per hónap. Vizsgáljuk meg az állam egy 300 000 lakosú városát!

a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott hónapban legalább 7 ember lesz öngyilkos?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott évben legalább 2 hónapban lesz legalább 7 öngyilkosság?

c) Legyen a mostani hónap az 1., mi a valószínűsége annak, hogy először az i. hónapban lesz legalább 7 öngyilkosság? ($i \geq 1$)

Milyen feltevésekkel éltünk?

4.16 •• Egy bulvárlapban oldalanként várhatóan 0.2 nyomtatási hiba van. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő oldalon

a) 0,

b) 2 vagy több hiba van?

Indokoljuk a választ!

5. HF:

5.1 Tegyük fel, hogy repülés közben egy repülőgép motorjai egymástól (teljesen) függetlenül $1-p$ valószínűséggel hibásodnak meg. Ha egy repülőnek a repüléshez a motorjainak legalább felére van szüksége, milyen p értékekre biztonságosabb egy ötmotoros repülőgép, mint egy hárommotoros?

5.2 Legyen X Binom$(n,\,p)$ eloszlású valószínűségi változó. Milyen p értékre lesz maximális $\mathbf{P}\{X=k\}$, $k=0,1,\ldots,n$? Ez arra példa, hogy a statisztikában hogyan becsülik meg p értékét, ha egy Binom$(n,\,p)$ eloszlású valószínűségi változó megfigyelt értéke k. Ha feltesszük, hogy n ismert, akkor p-t azzal a $\widehat{p}$ értékkel becsüljük, amire $\mathbf{P}\{X=k\}$ maximális. Ezt a módszert hívják **maximum likelihood** becslésnek.

5.3 6-szor feldobunk egy hamis pénzérmét, ami 70% valószínűséggel ad fejet. Ha tudjuk, hogy összesen 3-szor lett fej az eredmény, mi a valószínűsége, hogy

a) az első dobás fej;

b) az első 3 eredmény rendre $F,\ I,\ I$ (azaz az első fej, a második és a harmadik írás);

c) az első 3 eredmény rendre I,F,I;

d) az első 3 eredmény rendre I,I,I volt?

5.4 Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{X=i\}$ i növekedésével először nő, majd monoton csökken, a maximumát a $i=\lfloor\lambda\rfloor$-nél veszi fel. (*Tipp: tekintsük $\mathbf{P}\{X=i\}/\mathbf{P}\{X=i-1\}$-et.*)

5.5 Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\{X\text{páros}\}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2\lambda}).$$

5.6 •• Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

Bónusz: Egy erdő átlagos sűrűsége: 16 fa 100 m^2-enként. A fák törzse teljesen szabályos, 20 cm átmérőjű kör alapú henger. Egy puskagolyót lövünk ki célzás nélkül, az erdő szélétől 120 m-re, kifelé az erdőből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eltalálunk egy fatörzset?
(Tekintsünk el attól az apró zavaró tényezőtől, hogy a fák alapköreinek középpontjai min. 20 cm távolságban vannak.)

5.7 •• Számítsuk ki az $(1+X)^{-1}$ valószínűségi változó várható értékét a következő esetekben:

a) ha X Binom$(n,\,p)$ eloszlású;

b) ha X Poi(λ) eloszlású.

(*Tipp: integráljunk valami szépet.*)

5.8 Lovas gátversenyen a lovasok körpályán versenyeznek, és a ló a pályán elhelyezett sok akadály mindegyikét egymástól függetlenül azonos valószínűséggel veri le. Ha 5% annak valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy egy körben legfeljebb három akadályt ver le?

5.9 London központi kerületében bekövetkező autóbalesetek száma száraz napos időben $\lambda=10$ paraméterű Poisson-eloszlású, míg nedves esős időben $\mu=20$ paraméterű Poisson-eloszlású. Kora novemberben Londonban $p=0.6$ valószínűséggel van ronda esős idő (egész nap), $q=0.4$ a valószínűsége annak, hogy verőfényes napsütés van (szintén egész nap). Azt olvastam a *Times*-ban, hogy múlt csütörtökön 17 autóbaleset történt London központjában. Mennyi a valószínűsége annak, hogy esett az eső?

5.10 Egy nagy virágágyásba sok virágmagot szórunk egyenletesen. Később a virágágyást sok kis egyenlő méretű darabra osztjuk. Azt tapasztaljuk, hogy a kis darabok 10%-ába nem került egyetlen mag sem.

a) Hány magot szórtunk ki földdarabonként átlagosan?

b) A földdarabok hány százalékában lesz egynél több mag?

5.11 •• Móricka, ha túrázni megy, minden lépésnél – az előzményektől függetlenül – valamekkora (kicsi) valószínűséggel hasraesik és megüti a térdét, illetve valamekkora (kicsi) valószínűséggel hanyatt esik és megüti a könyökét. Egy 10 kilométeres túrán átlagosan 3-szor szokta megütni a térdét és 2-szer a könyökét. Legfeljebb milyen hosszú túrára engedheti el az anyukája, ha azt akarja, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel térd- és könyöksérülés nélkül járja meg?

5.12 Legyenek $p \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ és $\lambda = pn \in (0, \infty)$ rögzítve. Továbbá: $a_k := p_{\text{Binom}(n,\,p)}(k)/p_{\text{Poi}(\lambda)}(k)$. Bizonyítsuk be, hogy amint $k = 0, 1, 2, \ldots$ növekszik

a) a_k először növekszik, majd csökken, és a maximális értékét $\lfloor \lambda + 1 \rfloor$-nál éri el.

b) a_k először kisebb, mint 1, majd 1 fölé nő, majd újból 1 alá csökken.

Bónusz: Egy újságkihordó 100 forintért veszi és 150 forintért adja el az újságokat. Az el nem adott lapokat nem vásárolják tőle vissza. Ha az újságokra a napi igény binomiális eloszlású véletlen változó, $n = 10$ $p = \frac{1}{3}$ értékekkel, körülbelül hány lapot vegyen, ha várható profitját szeretné maximalizálni?

5.13 Tegyük fel, hogy egy adott időben történt események száma λ paraméterű Poisson valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha minden eseményt p valószínűséggel számolunk, függetlenül a többi eseménytől, akkor a megszámolt események száma λp paraméterű Poisson valószínűségi változó! Emellett adjunk intuitív érvelést arra, hogy miért kell ennek így lennie.
Az előzőek alkalmazására példa: Tegyük fel, hogy egy adott terület uránlelőhelyeinek száma Poi(10) eloszlású véletlen változó. Minden lelőhelyet a többitől függetlenül $\frac{1}{50}$ valószínűséggel fedeznek fel. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy (a) pontosan 1, (b) legalább 1 és (c) legfeljebb 1 lelőhelyet fedeznek fel az adott idő alatt.

5.14 •• A "Kocogj velünk!" mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

5.15 Adott egy hamis érménk, mely p valószínűséggel mutat *fej*et. Ezt az érmét 0 időpontban feldobjuk, és azt látjuk, hogy *fej*re esik. Egy λ paraméterű Poisson folyamat által megadott időpillanatokban az érmét újra és újra feldobjuk, míg egyéb időpontokban nem nyúlunk az érméhez. Mi a valószínűsége, hogy t-kor az érme fejet mutat?

5.16 Egy országban a házaspárok az első fiúig vállalnak gyereket. Mi a nemek aránya ebben az országban? Igaz-e, hogy az egy családban született gyerekek neme független egymástól?

5.17 Egy urnában 4 piros és 4 kék golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük piros és 2 kék, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 piros lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk?

5.18 •• Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1, illetve p_2 valószínűséggel ér el találatot ($p_1 < p_2$). Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, az nyer.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ügyesebb nyer?

b) Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egy lövést végeznek?

c) A várható időtartam azonnal adódik, ha $p_1 = p_2$ (miért?). Ellenőrizzük le, hogy az előző kérdésre adott válaszunk ebben az esetben az, ami azonnal adódik.

5.19 Az árokugró versenyfutás szabályai a következők: A futópálya egyenes, és van rajta végtelen sok egyforma árok. Két egyforma képességű versenyző méri össze az erejét árokfutásból, akik fej fej mellett futnak. Egy versenyző egymás után át próbálja ugrani az árkokat, végül egyszer túl kicsit ugrik és beleesik valamelyikbe. Tegyük fel, hogy egy versenyző sohasem fárad el, és az árkokat egymástól függetlenül, egyenként 2^{-L} valószínűséggel tudja átugorni, ahol L az árok hossza. Ha az egyikük beleesett egy árokba, akkor véget ért a verseny.

a) Mutassuk meg, hogy a döntetlen valószínűsége pontosan akkor kisebb ε-nál, ha

$$L < \log_2\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

teljesül.

b) Ha döntetlen, akkor visszaküldjük őket a startvonalhoz és újra kezdődik a verseny. Ezt ismételjük egészen addig, amíg győztest nem hirdethetünk. Mekkora legyen L, ha a versenyzők ugrásainak számának várható értékét akarjuk minimalizálni?

5.20 *Hipergeometriai eloszlás tart a Binomiálishoz*
Madarat gyűrűzünk: N madárból m gyűrűzött van. Képzeljük el, hogy a madárgyűrűzést évek óta csináljuk, a madárpopuláció is nő, és átlagosan a madarak egy bizonyos hányadát vagyunk képesek befogni. Pontosabban,

legyen most $N \to \infty$, $\frac{m}{N} \to p$! Bizonyítsuk be, hogy ekkor, ha (fix) n elemű mintát veszünk a populációból, és X jelöli a gyűrűzött madarak számát az n elemű mintában, akkor X eloszlása binomiálishoz tart, azaz

$$\lim_{N\to\infty, m/N\to p} \mathbf{P}(X = i) \to \mathbf{P}(Bin(n,p) = i)!$$

6. HF:

6.1 Tegyük fel, hogy X eloszlásfüggvénye, F a következőképpen adott:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } b < 0 \\ \dfrac{b}{4} & \text{ha } 0 \le b \le 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{b-1}{4} & \text{ha } 1 < b \le 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{ha } 2 < b \le 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < b \end{cases}$$

a) Számoljuk ki $\mathbf{P}\{X = i\}$-t, $i = 1, 2, 3$.

b) Mennyi $\mathbf{P}\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$?

6.2 •••

a) Egy rendszer a bekapcsolástól számítva X hónapig működik. Határozzuk meg X várható értékét, és annak valószínűségét, hogy a rendszer legalább 5 hónapig működik, ha X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} Cx\mathrm{e}^{-x/2} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$$

b) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} C(3x - x^3) & \text{ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és

$$g(x) = \begin{cases} C(3x - x^2) & \text{ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Lehet-e f ill. g sűrűségfüggvény? Ha igen, határozzuk meg C-t és az f ill. g által meghatározott eloszlások várható értékét!

c) Milyen α és c értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény?

$$F(x) = \exp(-ce^{-\alpha x})$$

6.3 Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Hogyha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01-nél kisebb valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

6.4 •• Tudjuk, hogy minden Y nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{Y > t\}\,\mathrm{d}t.$$

Mutassuk meg, hogy egy X nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty n x^{n-1} \mathbf{P}\{X > x\} \, \mathrm{d}x$$

teljesül. (*Tipp: kezdjük azzal, hogy*

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X^n > t\} \, \mathrm{d}t,$$

majd cseréljünk változót ($t := x^n$).)

6.5 **a)** Legyen X valószínűségi változó várható értéke μ, szórásnégyzete σ^2, és a harmadik momentuma is véges. Továbbá legyen g egy háromszor differenciálható függvény. Ha tudjuk, hogy X centrált harmadik momentuma elhanyagolható, akkor mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(g(X)) \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2}\sigma^2.$$

(*Tipp: fejtsük g-t μ körül 3 tagig Taylor sorba, és hanyagoljuk el a megmaradó részt!*)

b) Legyen X egy λ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha λ tart végtelenhez, akkor

$$\mathbf{D}^2(\sqrt{X}) \approx 0.25.$$

Lepődjünk meg. (*Tipp: használjuk fel az előző feladatot $\mathbf{E}(\sqrt{X})$ közelítésére!*)

6.6 Legyen $F(x)$ *folytonos* eloszlásfüggvény, és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$G(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\infty < x \le 1, \\ F(x) - F(x^{-1}), & \text{ha } 1 < x < \infty \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formulának.

6.7 Egyenletesen választunk egy pontot a $(0,1)$ intervallumból, jelölje ezt X. Mi annak a valószínűsége, hogy X, $1 - X$ és $1/2$ háromszöget alkot?

6.8 Konstruálható-e olyan folytonos $g : [0, 1] \to [0, \infty)$ függvény, amelyre $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 x \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\int_0^1 x^2 \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a^2$?

6.9 •• Ha egy találkozóra $s \in \mathbb{R}$ perccel korábban érkezem a megbeszéltnél, $a \cdot s$ petákot fizetek, ha s percet kések, $b \cdot s$-t fizetek. Az utazás a mai kaotikus közlekedési feltételek miatt meglehetősen véletlen ideig tart, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mikor induljak, ha a várható költséget szeretném minimalizálni? (Tipp: Írjuk fel a várható költséget integrálalakban és deriváljuk.)

6.10 A buszok rendre minden óra egészkor, 15-kor, 30-kor és 45-kor indulnak a megállóból. Ha véletlenszerűen érkezem 7:00 és 7:30 közt, mi annak a valószínűsége, hogy

a) 5 percnél kevesebet várok?

b) 8 percnél többet várok?

c) Ugyanez a két kérdés, ha 7:08 és 7:38 közt érkezem egyenletesen.

d) És ha 7:00 és 7:25 közt érkezem egyenletesen?

6.11 Bulgáriában történt, hogy egymás utáni két héten kihúzták pontosan ugyanazokat a nyerőszámokat a lottón. Maradjunk hazai vizeken: a hazai, 90-ből 5-öt húzós lottón

a) mi annak a valószínűsége, hogy jövő héten ugyanazokat a számokat húzzák, mint ezen a héten?

b) kicsit enyhítsük a kérdést: mi annak a valószínűsége, hogy a lottó 50 éves történetében (minden héten egy húzást feltételezve, szünet nélkül, évi 52 héttel számolva) valaha előfordul az, hogy két egymás utáni héten ugyanazt az öt számot húzzák?

c) még egy kicsit enyhítsük a kérdést: mi annak a valószínűsége, hogy a lottó 50 éves történetében (minden héten egy húzást feltételezve, szünet nélkül, évi 52 héttel számolva) valaha előfordul az, hogy olyan 5-öst húznak ki, ami már egyszer volt?

Adjunk numerikus értéket is.

6.12 ••• A felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg B felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

a) Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy A felé, és hányadrészében B felé?

b) És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?

c) Mi a helyzet akkor, ha B felé gyakrabban, vagyis 7:05-től kezdve 10 percenként indulnak a buszok? Számoljuk ki az előző két kérdés valószínűségét erre az esetre is!

Bónusz Egy busz A és B városok között jár, mely városok 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton. Pillanatnyilag egy buszszerviz található az A városban, egy a B városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervizt az A várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése? Milyen értelemben?

7. HF:

7.1 Egy egységhosszú ropin van egy sódarab az s helyen. Mire hazaérünk a boltból, a táskánkban véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kettétörik a ropi a csomagban. Mi a sódarabot tartalmazó ropidarab hosszának várható értéke?

7.2 Informatikus haverom az $\{1, 2, \ldots, n\}$-en egyenletes eloszlást szeretne generálni. Ezért a randomgenerátorából vesz egy $[0, 1]$-en egyenletes eloszlást, megszorozza n-nel, majd hozzáad 1-et, végül veszi az egészrészét. Számoljuk ki a kapott valószínűségi változó eloszlását! Ez alapján mondjuk meg, jó-e az eljárása.

7.3 Tegyük fel, hogy X normális eloszlású 5 várható értékkel. Ha $\mathbf{P}\{X > 9\} = 0.2$, közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?

7.4 Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalemberek magassága centiméterben mérve normális eloszlású, $\mu = 180$ és $\sigma^2 = 169$ paraméterekkel. A 25 éves fiatalemberek hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjainak hány százaléka magasabb 2 méter 10 cm-nél?

7.5 •• Egy gyár kétfajta érmét gyárt: egy igazságosat és egy hamisat, ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk, igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

7.6 Mutassuk meg, hogy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (*Tipp:* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$. *Helyettesítsünk* $y = \sqrt{2x}$*-et és hasonlítsuk össze az így kapott kifejezést a normális eloszlással!*)

7.7 •• Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált „abszolút momentumait" (φ a standard normális sűrűség):

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)|y|^k \, \mathrm{d}y, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(*Tipp: páros* $k = 2\ell$*-re számoljuk ki és használjuk a következő kifejezést:*

$$\left. \frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2} \, \mathrm{d}y \right|_{\lambda=1} .$$

Páratlan $k = 2\ell + 1$*-re hajtsuk végre a* $z = y^2$ *változócserét az* A_k*-t definiáló integrálban.*)

7.8 Legyen az X valószínűségi változó normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $t \in \mathbb{R}$-re az $\mathbf{E}(e^{tX})$ várható értéket! (Tipp: ez egy egyszerű integrálhelyettesítéssel visszavezethető a normális sűrűségfüggvény integráljára.)

7.9 Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban kapott képlet akkor is érvényes marad, ha t tetszőleges komplex szám! (Vigyázat: a normális sűrűségfüggvény integrálját csak a *valós* számegyenesen tanultuk, hogy mennyi. A bizonyításhoz kell valami komoly az analízisből.)

7.10 Legyen X nulla várható értékű és σ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3} \right) \quad < \quad \mathbf{P}\{X > x\} \quad < \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \frac{\sigma}{x}.$$

(*Tipp: differenciáljuk az egyenlőtlenséglánc mindhárom tagját, és hasonlítsuk össze a deriváltakat.*)

7.11 Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal a következő módon: megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott lakost, és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A NSZT-ből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n-et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.95 valószínűséggel 0.005 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Más szóval: határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, amelyre igaz, hogy bármely $p \in (0,1)$-re és $n \geq n_0$-ra

$$\mathbf{P}\{|p' - p| \leq 0.005\} \geq 0.95.$$

7.12 Az előző feladat kicsit máshogy ☺

Budapest utcáin az emberek 42%-a támogatná, hogy közterületen ne lehessen dohányozni. Közelítsük azt a valószínűséget, hogy n megkérdezett ember közül legalább 40% a betiltás mellett nyilatkozik, ha

a) $n = 11$,

b) $n = 101$,

c) $n = 1001$.

d) Hány embert kellene megkérdeznünk, hogy legalább 95% eséllyel 40% felett legyenek a betiltást támogatók?

7.13 ••• Van két egyforma biztosítótársaság egyenként tízezer ügyféllel. A 2007-es év elején minden ügyfél befizet a biztosítójának ötvenezer forintot, és az év folyamán minden ügyfél egymástól függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nyújt be kárigényt, amely minden esetben 150 ezer forintos. Mindkét biztosítótársaságnak van ezen felül 5 millió forint félretett pénze az előző évről. Egy biztosítótársaság csődbe megy, ha nem tudja kifizetni a beérkező kárigényeket. Érdemes-e egyesülnie a két biztosítótársaságnak? Legyen p_1 annak a valószínűsége, hogy a két biztosítótársaság közül legalább egy tönkremegy, és p_2 annak a valószínűsége, hogy az egyesült biztosítótársaság tönkremegy. Határozzuk meg p_1 és p_2 (közelítő) értékét, és vonjuk le a következtetést!

Bónusz: **(A Poisson eloszlás normális approximációja.)** Bizonyítsuk be, hogy $\lambda \to \infty$-re

$$\sqrt{\lambda} \cdot p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(\lfloor \lambda + x\sqrt{\lambda} \rfloor) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}),$$

és a hibatag egyenletesen kicsi, ha x egy korlátos halmazban marad. Következményként lássuk be, hogy

$$\sum_{\lambda + \alpha\sqrt{\lambda} < k < \lambda + \beta\sqrt{\lambda}} p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(k) \to \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

amint $\lambda \to \infty$.

7.14 A valszámium radioaktív bomló részecske átlagos élettartama 1 év. Mennyi ennek a részecskefajtának a felezési ideje?

7.15 A „Fény az éjszakában” típusú villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A gyártó mérései szerint a körték 90 százaléka bírja legalább egy évig. Mennyi időre vállalhat a gyártó garanciát a körték működésére, ha azt akarja, hogy a vevőknek legfeljebb 1 százaléka reklamáljon?

7.16 Reggel a földalatti szerelvények követési ideje exponenciális eloszlású valószínűségi változó 2 perc várható értékkel. Az egyik szerelvényt pont lekéstem.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5 percet várnom kell a következőre?

b) Már 3 perce várok hiába. Mennyi a valószínűsége, hogy még további 5 percig várnom kell?

7.17 (*Veszélyráta.*) Egy pozitív abszolút folytonos valószínűségi változó kockázati rátafüggvényének a $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ függvényt nevezzük.

a) Mi a kockázati rátafüggvény szemléletes jelentése?

b) Lássuk be, hogy ekkor

$$F(t) = 1 - \exp\left\{ - \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s \right\}!$$

c) Mi a λ paraméterű exponenenciális eloszlás rátafüggvénye?

d) És egy $[0, a]$ intervallumon egyenletes eloszlásé?

7.18 Gyakran hallani, hogy a dohányosok halálozási rátája (azaz a kockázati rátája a halál időpontjára vonatkozólag) minden életkorban kétszerakkora, mint az azonos korú nemdohányzóké. Igaza van-e annak a nemdohányzónak, aki erre azzal jön, hogy ő akkor kétszer akkora valószínűséggel fog még x évig élni, mint a dohányos osztálytársa? Ha nem, mi a két valószínűség viszonya? (*Tipp: előző feladat.*)

7.19 Egy nagyon gyors számítógépen futó program, miután elindult, minden órajel hatására (vagyis nagyon gyakran) megpróbál lefagyni – feltéve, hogy ez korábban nem sikerült neki – és valamilyen nagyon kicsi valószínűséggel le is fagy. A tapasztalat szerint ez a program az indítás után átlagosan 1 órával fagy le. Mi a lefagyásig eltelő (órában mért) idő eloszlása?

7.20 ••• Pistike nyári estéken csillaghullást néz. Egy-egy nyári estén nagyon sok meteor éri el a Földet, ezek mindegyikének egymástól függetlenül, nagyon kis valószínűséggel sikerül Pistike szeme elé kerülni – vagyis pont akkor és ott esni le, amikor és ahol Pistike látja. Így ő fél óra alatt átlagosan hármat lát lehullani. Augusztus 19-én este 22:00-kor kezdi nézni az eget.

a) Mi a valószínűsége, hogy 22:00 és 22:25 között egyetlen hullócsillagot sem lát?

b) Mi a valószínűsége, hogy T perc alatt egyetlen hullócsillagot sem lát, ahol $T \in \mathbb{R}^+$?

c) Az X valószínűségi változó legyen az az idő (percben mérve), amennyit Pistikének az első hullócsillag megpillantására várnia kell. Számoljuk ki X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

d) Fogalmazzuk meg szépen a tanulságot!

8. HF:

8.1 Legyen X egyenletes eloszlású a $[-3, 4]$ intervallumon, és legyen $\Psi(x) = |x-1| + |x+1|$. Határozzuk meg az $Y = \Psi(X)$ valószínűségi változó $G(y)$ eloszlásfüggvényét. Abszolút folytonos eloszlású-e Y? Adjuk meg a G eloszlásfüggvény Lebesgue-féle felbontását diszkrét, abszolút folytonos és folytonos de szinguláris nem csökkenő függvények összegére.

8.2 Határozzuk meg $R = A\sin(\Theta)$ eloszlását, ahol A egy rögzített konstans, és Θ egyenletes eloszlású $(-\pi/2, \pi/2)$-n. (*Az ilyen valószínűségi változók ballisztikánál jönnek elő: a v sebességgel α szögben kilőtt lövedék $R = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$ távolságban ér földet.*)

8.3 **a)** Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és $c > 0$. Mutassuk meg, hogy cX szintén exponenciális eloszlású, λ/c paraméterrel.

b) Most legyen X sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mi az $Y = aX + b$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?

c) Z eloszlása megegyezik $2Z$-jével. Mi ez a Z?

8.4 •••

a) Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg $Y = \mathrm{e}^X$ sűrűségfüggvényét. (*Y eloszlását lognormálisnak nevezik.*)

b) Mutassuk meg, lehetőleg számolás nélkül, hogy ekkor CY^α eloszlása szintén lognormális $\mu' = \alpha\mu + \log C$ és $\sigma'^2 = \alpha^2\sigma^2$ paraméterekkel. (*Tipp: tudjuk, hogy $Y = \mathrm{e}^X$, ahol X normális. Írjuk fel CY^α-t e^Z alakban, találjuk meg a kapcsolatot X és Z között, és használjuk tudásunkat a normális valószínűségi változó lineáris transzformáltjairól.*)

c) Valamely homokfajta részecskéi gömb alakúak, melyeknek átmérője (milliméterben mérve) log-normális eloszlású, $\mu = -0.4$ és $\sigma := 0.3$ paraméterekkel. Az egész homokmennyiség hány *súlyszázaléka* áll 0.5 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsékből?

8.5 Legyen X folytonos eloszlású valószínűségi változó, F eloszlásfüggvénnyel. Legyen $Y = F(X)$. Mutassuk meg, hogy Y valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $(0,\ 1)$ intervallumon.

8.6 Legyen X egy valószínűségi változó, amelyre $\mathbf{P}\{X = 0\} = 0$, és $Y := X^{-1}$. Mi a feltétele annak, hogy X és Y azonos eloszlásúak legyenek?

Bónusz Bizonyítsuk be, hogy ha ξ Cauchy eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, és $X := 1/\xi$, $Y := 2\xi/(1-\xi^2)$, $Z := (3\xi - \xi^3)/(1-3\xi^2)$, akkor X, Y és Z szintén Cauchy eloszlású. (*Tipp: Használjuk a következő trigonometriai azonosságokat: ha $\xi = \mathrm{tg}(\alpha)$, akkor $1/\xi = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, $2\xi/(1-\xi^2) = \mathrm{tg}(2\alpha)$ és $(3\xi - \xi^3)/(1-3\xi^2) = \mathrm{tg}(3\alpha)$.*)

8.7 •• Legyen ξ az X pont távolsága a sík $(1,\ 1)$ koordinátájú pontjától, ha

a) X-et az x-tengely $[0,\ 1]$ intervallumán véletlenszerűen választjuk;

b) X-et az x-tengely $[0,\ 2]$ intervallumán véletlenszerűen választjuk.

A két esetben határozzuk meg a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

8.8 Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással egy egyenlő oldalú háromszög belsejében, mely háromszögnek minden oldala 1 hosszúságú. Jelölje ξ e pontnak a távolságát a háromszög legközelebbi oldalától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

8.9 Egy ℓ hosszú ropit két egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kiválasztott pontban eltörünk.

a) Mi az így nyert három darab közül a legrövidebb hosszának a várható értéke?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három darabból háromszöget alkothatunk?

8.10 Két szabályos kockával dobunk. Határozzuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét, ha

a) X a dobott számok maximuma, Y a két dobott érték összege;

b) X az első kocka eredménye, Y a dobott számok maximuma;

c) rendre X, Y a dobott számok minimuma, ill. maximuma.

8.11 •• Legyenek X és Y független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. (Azaz: $\mathbf{P}\{X = i,\ Y = j\} = (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot (1-p)^{j-1} \cdot p,\ i,\ j > 0$.)

a) Sejtsük meg $\mathbf{P}\{X = i \mid X + Y = n\}$ értékét. (*Tipp: tegyük fel, hogy egy cinkelt érmét dobunk fel, egymás után sokszor. Az érme p valószínűséggel ad fejet. Ha a második fej az n-edik feldobásnál jön, mi az első fej bekövetkezése idejének eloszlása?*)

b) Igazoljuk (a)-beli eredményünket számolással. (*Tipp: ugye még emlékszünk mi független geometriai várakozási idők összegének az eloszlása?*)

8.12 Együttes eloszlásfüggvény-e a következő két függvény ($x,\ y \in \mathbb{R}$)?

$$F(x,y) = \exp(-e^{-(x+y)}), \qquad G(x,y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y}).$$

8.13 • Legyen $(X,\ Y)$ az $\{(x,\ y)\ :\ x^2 + y^2 \le 1\}$ egységkörben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választott pont koordináta-párja. Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényét.

8.14 Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y) & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat.

8.15 A patikába egy óra alatt betérő emberek száma Poisson eloszlású $\lambda = 10$ paraméterrel. Számoljuk ki annak feltételes valószínűségét, hogy legfeljebb 3 férfi tért be, feltéve, hogy 10 nő tért be a patikába abban az órában. Milyen feltevésekkel éltünk?

8.16 Egy férfi és egy nő találkozót beszélt meg 12:30-ra. Ha a férfi 12:15 és 12:45 között egyenletes eloszlású időben érkezik, és tőle függetlenül a nő 12:00 és 13:00 között egyenletes eloszlású időben érkezik,

a) határozzuk meg annak valószínűségét, hogy aki először érkezik, 5 percnél kevesebbet vár.

b) Mi a valószínűsége, hogy a férfi érkezik elsőnek?

8.17 n pontot függetlenül egyenletesen elosztunk egy kör kerületén, és szeretnénk meghatározni annak valószínűségét, hogy mind egy félkörbe esnek (vagyis annak valószínűségét, hogy van egy olyan, a kör középpontján átmenő egyenes, melynek az összes pont az egyik oldalán van). Jelölje $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ a pontokat. Legyen A az az esemény, hogy az összes pont egy félkörbe esik, és A_i az az esemény, hogy az összes pont abba a félkörbe esik, amely P_i-től indul az óramutató járásával egyező irányban, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

a) Fejezzük ki A-t az A_i-k segítségével.

b) Igaz-e, hogy az A_i-k kölcsönösen kizáróak?

c) Határozzuk meg $\mathbf{P}\{A\}$-t.

d) Most válaszoljuk meg a következő kérdést: ha egy *körlapon* egymástól függetlenül n pontot egyenletes eloszlással elhelyezünk, mi a valószínűsége, hogy a kör középpontja benne lesz a pontok konvex kombinációiként előálló halmazban?

8.18 •• Az X és Y valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye

$$f(x,\ y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-(x+y)}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Független-e X és Y? És ha a közös sűrűség

$$f(x,\ y) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 < y < 1,\ 0 < x < y, \\ 0, & \text{egyébként?} \end{cases}$$

9. HF:

9.1 **a)** Legyenek $X \sim \mathrm{E}(0,\ 1)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg $X+Y$ eloszlását.

b) Legyenek $X \sim \mathrm{E}(0,\ 1)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását.

c) Legyenek $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását, és a $\mathbf{P}\{X < Y\}$ valószínűséget.

d) Legyen X és Y két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy az $U := X+Y$ és $V := X/(X+Y)$ valószínűségi változók függetlenek.

9.2 **a)** Legyen X és Y a két koordinátája annak a pontnak, melyet az origó középpontú, 1 sugarú körlapon egyenletesen választottunk. (Azaz: a közös sűrűségfüggvény $f(x,\ y) = 1/\pi$, ha $x^2 + y^2 \le 1$.) Határozzuk meg az $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ és a $\Theta = \operatorname{arc\,tg} Y/X$ valószínűségi változók közös sűrűségfüggvényét.

b) Legyen U_1, U_2 két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$-en. Bizonyítsuk be, hogy ha $X = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$ és $Y = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)$, akkor az (X, Y) pár kétdimenziós normális eloszlású.

9.3 Mutassuk meg *számolással*, hogy ha $X_i,\ i = 1,\ \ldots,\ n$ független azonos eloszlású geometriai valószínűségi változók, akkor $X_1 + \cdots + X_n$ negatív binomiális eloszlású. Használjunk indukciót. (A valószínűségszámítási érvelést már láttuk előadáson.)

9.4 •• Egy ember vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. *Menetrend szerint* a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje *normális eloszlású* valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 3 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 4 perc. Mennyi annak a valószínűsége, hogy emberünk a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal késse le a buszcsatlakozást?

9.5 ••• Legyenek X, Y és Z független, azonos $\mathrm{Geom}(p)$ eloszlású valószínűségi változók.

a) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$\mathbf{P}\{X = Y\}, \qquad \mathbf{P}\{X \ge 2Y\}, \qquad \mathbf{P}\{X + Y \le Z\}.$$

b) Legyen $U := \min\{X, Y\}$ és $V := X - Y$. Bizonyítsuk be, hogy U és V függetlenek.

9.6 **A függetlenség szimmetriája.** Legyenek $X_1,\ X_2,\ \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók az F folytonos eloszlásból. (Próbaként, lehet egyenletes.) Jelölje A_n azt az eseményt, hogy az X_n rekord, azaz nagyobb, mint az összes addigi. Mennyi $\mathbf{P}\{A_n\}$? Független-e A_{n+1} A_n-től? Számítsuk ki a $\mathbf{P}\{A_n \mid A_{n+1}\}$ és $\mathbf{P}\{A_{n+1} \mid A_n\}$ feltételes valószínűségeket.

9.7 Legyenek X, Y független, $[0,\ 1]$-en egyenletes valószínűségi változók. Mi a távolságuk sűrűségfüggvénye?

Bónusz: **Rendezett minták.** Leszórunk a $[0,\ 1]$-re egyenletesen n pontot. Mi a k. pont sűrűségfüggvénye? Rávezető kicsit egyszerűbb kérdések: Mi a maximum eloszlása? Mi a sűrűségfüggvény? És a 2. legnagyobbé? (Hogyan kapjuk meg deriválás nélkül, közvetlenül?)

9.8 Legyenek $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poi}(\mu)$ eloszlású független valószínűségi változók. Mi lesz X feltételes eloszlása $X + Y$ ismeretében? Számoljuk ki, majd ismerjük fel az eloszlást és vonjuk le a tapasztalatot a Poisson folyamatra gondolva.

9.9 •• Legyenek $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5$ független azonos eloszlású, folytonos valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük legyen F, sűrűségfüggvényük legyen f, továbbá legyen

$$I = \mathbf{P}\{X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5\}.$$

a) Mutassuk meg, hogy I nem függ F-től. (*Tipp: Írjuk át I-t ötös integrállá, és alkalmazzuk az $u_i = F(x_i),\ i = 1, \dots, 5$ változócserét.*)

b) Számoljuk ki I értékét!

c) Adjunk szemléletes magyarázatot az előző pontban kapott eredményre!

9.10 Két dobókockával dobunk, legyen X a nagyobb, Y a kisebb dobott szám. Számoljuk ki Y feltételes súlyfüggvényét, az $X = i,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ 6$ feltétel mellett. Független egymástól X és Y? Miért?

9.11 X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = c\left(x^2 - y^2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad 0 \le x < \infty,\ -x \le y \le x.$$

Mi Y feltételes eloszlása, $X = x$ feltétel mellett?

9.12 ••• Legyenek X, Y és Z független valószínűségi változók. Legyen X ill. Y eloszlásfüggvénye $F(x)$, ill. $G(x)$, és legyen $\mathbf{P}\{Z = 1\} = p = 1 - \mathbf{P}\{Z = 0\}$. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit:

$$T := ZX + (1 - Z)Y, \qquad U := ZX + (1 - Z)\max\{X,\ Y\}, \qquad V := ZX + (1 - Z)\min\{X,\ Y\}.$$

9.13 Egy kínai boltban háromféle kompakt fénycső kapható, a rendetlenség miatt jól összekeveredve. Mindegyikének élettartama exponenciális eloszlású, ám a várható élettartamok különbözőek: a kupac 15%-a "selejtes", be se kapcsol, a maradék 4000, 8000, 9000 óráig bírják, ezek egyenlő arányban vannak jelen. Vaktában választok. Mi lesz így az általam hazavitt fénycső élettartamának sűrűségfüggvénye?

9.14 X és Y legyen független azonos eloszlású λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

a) Mi X feltételes eloszlása az $X + Y = z$ feltétel mellett?

b) Nézzünk vissza a 8.11-es feladatra!

9.15 Egymástól függetlenül N ember érkezik egy üzleti vacsorára. Amikor megérkezik, minden ember körülnéz, hogy van-e a már megjelentek között barátja, majd vagy odaül az egyik barátjának az asztalához, vagy egy üres asztalhoz ül, ha nem érkezett meg még egy barátja sem. Ha bármely két ember mindentől függetlenül p valószínűséggel barátja egymásnak, számoljuk ki az elfoglalt asztalok várható számát! (*Tipp: legyen X_i annak az indikátora, hogy az i-edik megérkező üres asztalhoz ül. (Azaz $X_i = 1$, ha üres asztalhoz ül, és $X_i = 0$, ha nem.)*)

10. HF:

10.1 Legyen $\underline{X} = (X_1,\ X_2,\ X_3)$ háromdimenziós véletlen vektor, amelynek komponensei független $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlásúak. Definiáljuk a következő változókat:

$$\varrho := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \qquad \xi_i := X_i/\varrho, \qquad i = 1, 2, 3.$$

a) Határozzuk meg ϱ sűrűségfüggvényét.

b) Bizonyítsuk be, hogy ϱ és a $\underline{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ vektorváltozó egymástól függetlenek, továbbá azt, hogy a $\underline{\xi}$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömb felszínén.

10.2 Legyenek X és Y független $\mathcal{N}(0,1)$ illetve $\mathcal{N}(0,4)$ eloszlású valószínűségi változók és M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái $(X;\, Y)$. Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

a) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 1,\ |y| \le 2\}$,
b) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ |y| \le 2\}$,
c) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$,
d) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y \le 0,\ |x| \le 1,\ y \ge -2\}$,
e) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + (y^2/4) \le 1\}$,
f) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + (y^2/4) \le c^2\}$.

10.3 ••• A kóbor kutyák átlagos testsúlya 40 kg, a testsúlyuk szórása pedig 20 kg. A sintérek által a kutyák elfogására használt háló elszakad, ha a kutya 60 kilósnál nehezebb, a 20 kilósnál kisebb kutyák pedig ki tudnak bújni belőle. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kutya testsúlya az átlagtól nem tér el 20 kg-mal többel, és így biztonsággal el lehet kapni a hálóval, ha

a) a testsúly $\mathcal{N}(40,\, 400)$ normális eloszlású;
b) a testsúly lognormális eloszlású, melynek 40 kg a várható értéke és 20 kg a szórása.

A két modell közül melyik valószerűbb?

10.4 Adott egy 100 emberből álló csoport.

a) Mennyi azon napok várható száma, amikor legalább 3 embernek van közülük születésnapja?
b) Várhatóan hány olyan nap van egy évben, amikor közülük valakinek születésnapja van?

10.5 (hasonló, mint az előző, csak picit máshogy) Egy urnában van n golyónk, ebből húzunk a_n darabot ismétléssel.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy az i-edik golyót legalább kétszer húzom ki?
b) Milyen a_n értékre lesz a legalább kétszer húzott golyók számának várható értéke Cn^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ nagyságrendű? Spec $\alpha = 0$-ra mekkora az a_n?
c) Mik a szóba jöhető α kitevők?

10.6 ••• Véletlenszerűen sorban áll n férfi és n nő.

a) Mennyi azon férfiak várható száma, akik mellett (azaz előtt vagy mögött) nő áll a sorban?
b) Mennyi lenne a válasz, ha nem sorban állnának, hanem egy kerek asztal köré ülnének le?

10.7 •• Legyen $X_1,\, X_2,\, \ldots$ független azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók sorozata, legyen $N \ge 2$ olyan, hogy

$$X_1 \ge X_2 \ge \cdots \ge X_{N-1}, \quad X_{N-1} < X_N.$$

Azaz az N-edik az első tagja a sorozatnak, ahol a sorozat növekvővé válik. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(N) = \mathrm{e}$. (*Tipp: érdemes először kiszámolni* $\mathbf{P}\{N \ge n\}$*-t.*)

10.8 **a)** Legyenek X és Y független, nemnegatív értékű folytonos valószínűségi változók, melyekre $\mathbf{E}X < \infty$ és $\mathbf{E}Y < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}\min\{X,\, Y\} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X \ge t\} \cdot \mathbf{P}\{Y \ge t\}\ \mathrm{d}t.$$

b) Általánosítsuk az előbbi összefüggést tetszőleges k darab független, nemnegatív értékű folytonos X_1, $X_2, \ldots X_k$ valószínűségi változóra, melyekről feltesszük, hogy véges a várható értékük:

$$\mathbf{E}\min\{X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_k\} = \int_0^\infty \prod_{j=1}^k \mathbf{P}\{X_j \ge t\}\ \mathrm{d}t.$$

c) Az a) kérdés feltételei mellett bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}\max\{X,\, Y\} = \int_0^\infty \left[1 - \mathbf{P}\{X \le t\} \cdot \mathbf{P}\{Y \le t\}\right]\ \mathrm{d}t.$$

d) Legyenek $X_1, X_2, \ldots X_k$ független, $(0, 1)$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az

$$\mathbf{E}\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}, \qquad \mathbf{E}\max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$$

várható értékeket.

10.9 •• n-szer feldobunk egy p valószínűséggel fejet adó érmét. Számoljuk ki az $1, 2, \ldots, k$ hosszú csupa fej részsorozatok várható számát! $(1 \leq k \leq n)$

10.10 Tízszer feldobunk egy hamis érmét, amin a fej valószínűsége p. Jelölje X a tiszta sorozatok számát (mint az 4.8. feladatban). Mennyi X várható értéke? (Vigyázat: az érme ezúttal hamis.)

Bónusz: Tekintsük az n hosszú $0-1$ kódokat, ahol minden koordináta független, p valószínűséggel 0, $1-p$ valószínűséggel 1. Gondoljunk ezekre úgy, mint egy gráf csúcsaira. Két csúcs közt menjen pontosan akkor él, ha csak a kódjuk legvégén lévő tiszta blokkban térnek el, vagyis valamely közös kezdeti rész után az egyik kód csupa 0-val, a másik csupa 1-gyel folytatódik. (Tehát pl. 1110011000 szomszédjai: 1110011001, 1110011011 és 1110011111.) Sorsolok egy 0-val illetve egy 1-gyel kezdődő kódot a fenti eloszlással, vagyis a többi koordinátát már függetlenül p valószínűséggel 0-nak, $1-p$-vel 1-nek. Mennyi az így kapott két kód közt húzott legrövidebb út várható értéke? Mi a válasz, ha $p = 1/2$? *Segítség: írjunk fel két ilyen kódot, és találjuk ki, hogyan jutunk el egyiktől a másikig a legrövidebb módon! Hogy kapcsolódik ez vajon a tiszta blokkok számához? És: vigyázzunk, hogy az egyik kód* 0*-val kezdődik a másik pedig* 1*-gyel!*

10.11 Dobókockával addig dobálunk, amíg 1-től 6-ig minden szám legalább egyszer elő nem fordul. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

10.12 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy egy rekordérték tűnik fel j-kor $(j \leq n)$, ha $X_j \geq X_i$ minden $1 \leq i \leq j$ esetén. Mutassuk meg, hogy

a) $\mathbf{E}[\text{rekordértékek száma}] = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

b) $\mathbf{D}^2[\text{rekordértékek száma}] = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{j-1}{j^2}$.

10.13 Legyenek X és Y független azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók. $\mathbf{E}\frac{X}{X+Y} = ?$

Bónusz: Három próbálkozási lehetőségünk van, mindegyik próbálkozás azonos valószínűséggel sikeres. Jelölje X a sikeres próbálkozások számát. Ha tudjuk, hogy $\mathbf{E}(X) = 1.8$,

a) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legnagyobb értéke?

b) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legkisebb értéke?

Mindkét esetben találjunk ki egy valószínűségi forgatókönyvet, aminek eredménye $\mathbf{P}\{X = 3\}$, és ez az érték a lehető legnagyobb/legkisebb. (*Tipp: a b) rész megoldását kezdhetjük úgy is, hogy legyen U a $(0, 1)$-en egyenletes valószínűségi változó, majd definiáljuk a próbálkozásokat U-val kifejezve.*)

10.14 Pistike egy nagy doboz rossz minőségű villanykörtét vásárolt, amiknek az élettartama független exponenciális eloszlású mindössze 10 perc várható értékkel. Este 10-kor leül valószínűségszámítást tanulni, becsavarja az asztali lámpájába az első körtét, és felkapcsolja. Ezután amikor egy körte kiég, rögtön kicseréli, és a következő mellett tanul tovább. Jelölje $\tau_1, \tau_2, \ldots$ az egyes villanykörték élettartamát.

a) Jelölje T_2 azt az időpontot (este 10-től számítva, percben), amikor a második körte kiég, vagyis $T_2 = \tau_1 + \tau_2$. Mi T_2 sűrűségfüggvénye? Számoljuk ki közvetlenül.

b) "Kitekintő": Mi annak a valószínűsége egy POI(1/10) folyamatban, hogy még nem érkezett meg t-kor a második pont? És hogy már megérkezett? Deriváljuk és hasonlítsuk össze az első pontbeli eredménnyel.

c) Jelölje T_n azt az időpontot (este 10-től számítva, percben), amikor az n-edik körte kiég, vagyis $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$. Mi T_n sűrűségfüggvénye?

d) Minden n-re írjuk fel annak valószínűségét, hogy n darab körtével nem tudja kihúzni fél óráig – vagyis hogy $T_n < 30$. (A kapott közepesen csúnya integrál kiszámolása nélkül is továbbléphetünk.)

e) Jelölje X a Pistike által az első 30 perc alatt elhasznált körték számát. Mi X eloszlása?

f) Emlékezzünk a 7.20. feladatra!

10.15 Lacika addig dobál egy dobókockát, amíg nem sikerül neki kétszer *egymás után* hatost dobni. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke? (Segítség: nézzünk feltételes várható értékeket!)

11. HF:

11.1 **a)** Ha $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg $\mathbf{E}[(2+X)^2]$ és $\mathbf{D}^2(4+3X)$ értékét.

b) Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbf{E}[(X-Y)^2]$ értékét.

11.2 • Legyenek X és Y független valószínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, és egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk becsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1-\lambda)Y$ becslést fogjuk adni, valamilyen λ paraméterrel. Hogyan válasszuk λ-t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen? Miért érdemes ezt a λ-t használnunk?

11.3 Legyen az (X, Y) pont egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ pontok által meghatározott háromszögben.

a) Mi lesz az (X, Y) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

b) Legyen $Z = X + 2Y$. Mi lesz az (X, Z) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

11.4 10 házaspár ül le véletlen elhelyezéssel egy kerekasztalhoz. Számítsuk ki

a) a várhatóértékét,

b) a szórásnégyzetét

annak, hogy hány férj ült a felesége mellé.

11.5 **a)** Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

b) Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$-t. Függetlenek-e X és Y?

11.6 •• X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-(y+x/y)}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 1$.

b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X^2|Y = y)$-t is.

11.7 •• Egy *gráf csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1-p$ valószínűséggel. (Ezt hívják Erdős-Rényi véletlen gráfnak.) Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i, D_j)$ korrelációs együtthatóját. (*Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az X_i, X_j, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.*)

11.8 Egy liftbe a földszinten belépő emberek száma egy ismeretlen eloszlású X valószínűségi változó, 1-nél nagyobb várható értékkel. n emelet van és minden ember egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel száll ki az n emelet bármelyikén. Legyen Y az a valószínűségi változó, hogy hányszor áll meg a lift, míg az utolsó utast is kirakja. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{E}(Y) < \mathbf{E}(X)$.

11.9 Az előző feladatban tegyük föl, hogy X eloszlása Poisson, 10 várható értékkel. Számoljuk ki $\mathbf{E}(Y)$-t.

11.10 Egy ember autóbaleseteinek száma egy adott évben λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ez a λ paraméter minden embernél más és más, a népesség 60 százalékánál 2, 40 százalékánál 3. Ha véletlenül kiválasztunk egy embert, mi a valószínűsége annak, hogy

a) nem történt vele baleset,

b) pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben?

c) Mi a feltételes valószínűsége, hogy pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben, feltéve, hogy előző évben nem történt vele baleset?

d) Ismételjük meg az előzőeket, ha az x-nél kisebb λ paraméterrel rendelkező emberek aránya a népességben $1 - \mathrm{e}^{-x}$.

11.11 •• Legyenek $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg

$$\mathbf{E}(X_1 \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$$

értékét. (*Tipp:* $\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$.)

11.12 Legyen X standard normális eloszlású, és I X-től független, $\mathbf{P}\{I = 1\} = \mathbf{P}\{I = 0\} = 1/2$ eloszlással. Definiáljuk a következő valószínűségi változót:

$$Y := \begin{cases} X, & \text{ha } I = 1, \\ -X, & \text{ha } I = 0. \end{cases}$$

Azaz: Y (X-től függetlenül) egyenlő eséllyel lesz X vagy $-X$.

a) Mutassuk meg, hogy Y standard normális eloszlású.

b) Független-e I és Y?

c) Független-e X és Y?

d) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X,\ Y) = 0$.

11.13 Az $(X,\ Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó legyen kétdimenziós normális eloszlású $\underline{m} = (-1, 1)$ várható-érték-vektorral és $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Számítsuk ki a $\mathbf{P}\{X \geq -1,\ Y \geq 1\}$ valószínűséget! (*Tipp:* $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}^2$, *ahol* $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.)

11.14 **a)** A feltételes kovariancia a feltételes várható értékkel úgy van definiálva, mint a kovariancia a várható értékkel. Vezessük le a *feltételes kovariancia formulát*:

$$\mathbf{Cov}(X,\ Y) = \mathbf{E}\big(\mathbf{Cov}(X,\ Y \mid Z)\big) + \mathbf{Cov}\big(\mathbf{E}(X \mid Z),\ \mathbf{E}(Y \mid Z)\big).$$

b) Hamis érmével dobunk, melynél a *fej* valószínűsége p, az *írásé* pedig $q = 1 - p$. Jelöljük X-szel és Y-nal az első, illetve a második tiszta (fej vagy írás) sorozat hosszát. (Pl. ha dobássorozatunk $FFFIIF\dots$, akkor $X = 3$, $Y = 2$; ha pedig dobássorozatunk $IFFI\dots$, akkor $X = 1$, $Y = 2\dots$) Határozzuk meg a következő mennyiségeket: $\mathbf{E}X$, $\mathbf{E}Y$, $\mathbf{E}X^2$, $\mathbf{E}Y^2$, $\mathbf{D}^2X$, $\mathbf{D}^2Y$, $\mathbf{Cov}(X,\ Y)$.

11.15 Egy négyzetrácsos papírra egy tintapaca csöppen. Mekkora a valószínűsége, hogy a paca nem metszi a vonalakat, ha azok fél centire vannak egymástól, a tintafolt sugara pedig egyenletes eloszlású a $[0\,\mathrm{cm},\ 1/3\,\mathrm{cm}]$ intervallumon?

11.16 Szindbádnak egyszer megadatott, hogy N háremhölgy közül kiválassza a legszebbet a következő játékszabály szerint: az N háremhölgy egyenként vonult el előtte, azok valamelyikét kellett kiválasztania. A már elvonultak nem hívhatók vissza és azokról, akik még nem vonultak el, semmit sem tudott. Feltételezzük, hogy a háremhölgyeknek jól definiált szépségfokozatuk van: van egy legszebb, egy második legszebb, egy harmadik legszebb, és végül a legkevésbé szép közöttük. Továbbá azt is feltételezzük, hogy véletlen sorrendben vonulnak el Szindbád előtt: mind az $N!$ lehetséges sorrendjük egyformán valószínű.

Szindbád a következő stratégiát választotta: k hölgyet hagyott elvonulni, majd ezután kiválasztotta azt, amelyik szebb volt az összes előtte már elvonultnál (és ha ilyen hölgy nem akad, akkor Szindbád magányosan távozik). Mi a valószínűsége annak, hogy ezzel a módszerrel valóban a legszebb háremhölgyet választotta? Határozzuk meg azt a k-t, amely mellett a fenti stratégia optimális $N \to \infty$ határesetben, és a stratégiához tartozó valószínűséget is. (*Tipp: használjunk teljes valószínűség tételt aszerint, hogy a legszebb hölgy hanyadikként jön(ne) el Szindbád előtt.*)

11.17 Az előző feladatban leírt feltételek mellett jelölje X_n azt, hogy a sorban n-edik hölgy hányadik legszebb az első n hölgy közül. Például ha az egymás utáni hölgyek egyre szebbek, akkor a sorozat $1,\ 1,\ \dots,\ 1$ lesz, ha egyre csúnyábbak, akkor $1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ N$. Bizonyítsuk be, hogy az $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_N$ valószínűségi változók teljesen függetlenek.

11.18 ••• Legyen $Y \sim \mathcal{N}(\mu,\ 1)$, és $X \mid Y \sim \mathcal{N}(Y,\ 1)$.

a) Mutassuk meg, hogy az $(X,\ Y)$ pár együttes eloszlása ugyanaz, mint az $(Y + Z,\ Y)$ páré, ahol Z egy Y-tól független standard normális valószínűségi változó.

b) Ennek segítségével mutassuk meg, hogy az $X,\ Y$ pár kétdimenziós normális eloszlású.

c) Számítsuk ki az $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}^2X$, $\mathbf{Corr}(X, Y)$ mennyiségeket.

d) Határozzuk meg $\mathbf{E}(Y \mid X = x)$ értékét.

e) Mi Y feltételes eloszlása az $X = x$ feltétel mellett?

11.19 Egy hibátlan kockával dobunk tízszer. Jelölje X azt a számot, ahányszor páros dobást páratlan követ. Mennyi X várható értéke és szórása?

Bónusz Egy urnában a darab fehér és b darab piros golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg fehér golyót nem találunk. Mennyi az addig kihúzott piros golyók számának várható értéke és szórásnégyzete?