1. Komplex számok

A valós számok és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. A számfogalom a számegyenes pontjainak körében nem bővíthető tovább. A számfogalom bővítését indokolja az, hogy például az

$$x^2 = -1 \quad \text{és} \quad x^2 + x + 1 = 0$$

egyenletek megoldását számnak tekinthessük:

$x = \sqrt{-1} = \imath$ *(imaginárius egység)*, illetve $x_{12} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\imath$

Komplex számnak nevezük az $a + b\imath$ szimbólummal jelölt számokat, ha a és b valós. Az $a + b\imath$ komplex szám valós része a, imaginárius vagy képzetes része b.

Megállapodunk abban, hogy a komplex számok között az összeadást, kivonást, szorzást, osztást ugyanolyan szabályok szerint végezzük el, mint a valós számok körében. (Bebizonyítható, hogy ez a megállapodás lehetséges, és a komplex számok halmazán ugyanazok az azonosságok érvényesek, mint a valós számokra.)

Komplex szám akkor és csakis akkor 0, ha $a + bi$-ben $a = 0$ és $b = 0$.
$b = 0$-ra a komplex számok részhalmaza a valós számok.
$a = 0$-ra a komplex számok részhalmaza az imaginárius számok.

Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha a valós részei és imaginárius részei egyenlők:

$$a_1 + b_1\imath = a_2 + b_2\imath \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$$

Összeadás: $(a + b\imath) + (c + d\imath) = (a + c) + (b + d)\imath$.
Szorzás: $(a + b\imath)(c + d\imath) = ac + bc\imath + ad\imath + bd\imath^2 = (ac - bd) + (bc + ad)\imath$.

Példák:

$$(6 + 2\imath) + (8 - 4\imath) = 14 - 2\imath$$

$$(-3 + 4\imath)(7 + 3\imath) = -21 + 28\imath - 9\imath - 12 = -33 + 19\imath$$

$$(5 + 2\imath)(5 - 2\imath) = 25 + 4 = 29$$

$$(5 + 2\imath)^2 = 25 + 20\imath - 4 = 21 + 20\imath$$

$$\imath^2 = -1\,, \quad \imath^3 = -\imath\,, \quad \imath^4 = 1\,, \quad \imath^5 = \imath$$

Két komplex szám hányadosa *(osztás)*:

$$\frac{a+b\imath}{c+d\imath}=\frac{(a+b\imath)(c-d\imath)}{(c+d\imath)(c-d\imath)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\imath}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\imath$$

Példa hatványozásra:

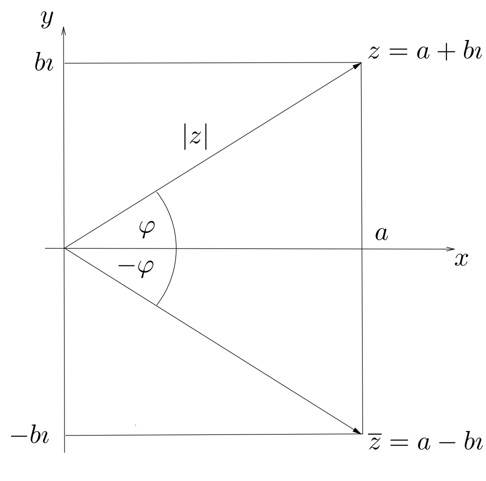
$$(5+\imath)^3=5^3+3\cdot 5^2\cdot\imath+3\cdot 5\cdot\imath^2+\imath^3=125+75\imath-15-\imath=110+74\imath$$

2. Komplex számsík

A komplex számokról szemléletes képet kapunk a komplex számsík által.

1) A komplex számok és a rendezett számpárok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

2) A rendezett számpárok és a koordinátasík pontjai között ugyancsak kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés.



A $z=a+b\imath$ komplex számhoz tartozik az (a,b) pont és a hozá tartozó helyvektor. Ennek hossza a szám abszolútértéke: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. A komplex szám argumentuma vagy irányszöge az a szög, amellyel az x tengelyt pozitív irányban elforgatva fedi a vektort. Ez az argumentum forgásszög, tehát φ, $\varphi\pm 360°$, $\varphi\pm 2\cdot 360°$, ... ugyanazt a komplex számot határozza meg. Negatív irányban forgatva a φ szög negatív értelmű. Jele: $\arg z=\varphi$. Bizonyítható:

1) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Konjugált komplex számok:
$z = a + b\imath$ és $\overline{z} = a - b\imath$ egymás konjugáltjai: $\overline{z}$ a z-nek a valós tengelyre való tükörképe:

1) $|z| = |\overline{z}|$

2) $\arg z = -\arg \overline{z}$

3) $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$ ugyanis $(a + b\imath)(a - b\imath) = a^2 + b^2$

Konjugáltakra vonatkozó azonosságok:

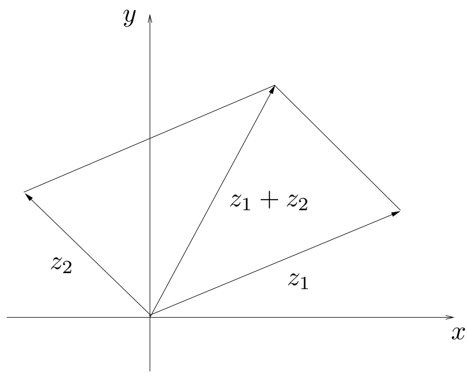
1) $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

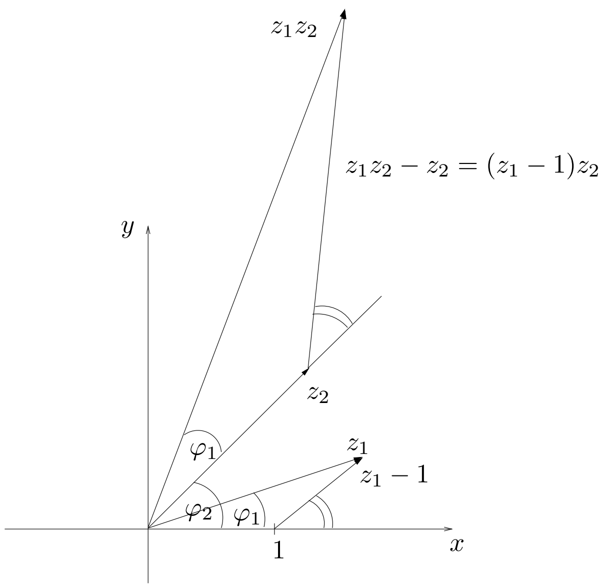
3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

4) $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Komplex számok összeadása a vektorösszeadás szabályai szerint történik, szemléltetése is ennek megfelelő. A sík minden z pontjához a b komplex számot adva a kapott $z' = z + b$ komplex számoknak megfelelő pontok a sík pontjainak b vektorral való *eltolásával* adódnak.



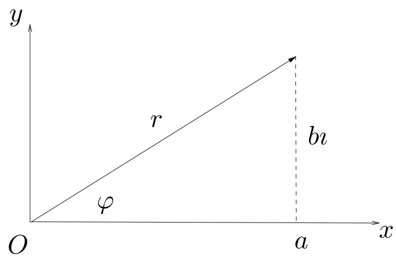
Komplex számok szorzása $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ a korábbi azonosságokból következik. Az ábrán lévő kisebb háromszög mindegyik oldalához tartozó számot z_2-vel szorozva a nagyobb háromszög oldalvektorait kapjuk. Innen következik,



hogy $\arg z_1z_2 = \arg z_1 \arg z_2$. A $z' = az$ leképezés $\arg z$-vel való elforgatás és $|a|$-kel való nyújtás egymásutánja: *forgatva nyújtás.*

Komplex számnak valós számmal való szorzása: az O pontra vonatkozó *centrális hasonlóság.*

3. Komplex számok trigonometrikus alakja

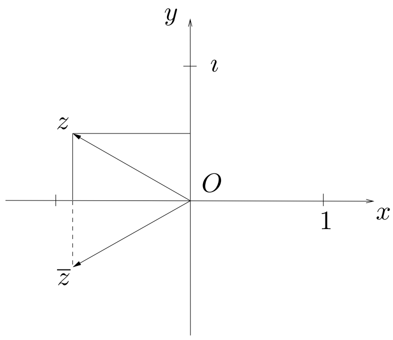


$$z = \underbrace{a + b\imath}_{\text{algebrai alak}} = \underbrace{r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)}_{\text{trigonometrikus alak}}$$

ahol

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

1) Írjuk fel trigonometrikus alakban a $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath$ komplex számot!



$$r = |z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 150^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \sin 150^\circ$$

Tehát z trigonometrikus alakja: $z = \cos 150^\circ + \imath\sin 150^\circ$.
z konjugáltjának trigonometrikus alakja: $\overline{z} = \cos 210^\circ + \imath\sin 210^\circ$.

2) Írjuk fel a $z = 5(\cos 60^\circ + \imath\sin 60^\circ)$ trigonometrikus alakban adott komplex számot algebrai alakban!

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{így} \quad z = \frac{5}{2} + \imath\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Szorzás trigonometriai alakban:
Ha

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \imath\sin\varphi_1) \quad \text{és} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \imath\sin\varphi_2),$$

akkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + \imath\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \imath\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \imath\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \imath\cos\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \imath\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Hatványozás trigonometriai alakban:

$$z^n = r\cdot r\cdot\ldots\cdot r\big\{(\cos(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi) + \imath\sin(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi)\big\} =$$

$$= r^n(\cos n\varphi + \imath\sin n\varphi) \qquad \text{(Moivre-képlet)}$$

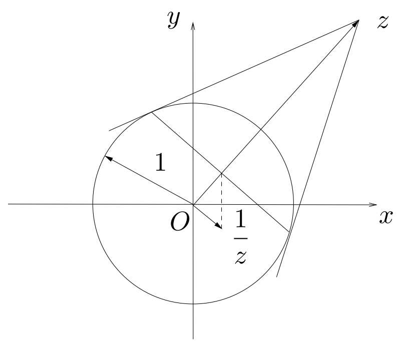
Osztás trigonometriai alakban:
A $z = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)$ komplex szám reciproka: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\big(\cos(-\varphi) + \imath\sin(-\varphi)\big)$,
ugyanis így $z\dfrac{1}{z} = r\dfrac{1}{r}\big(\cos(\varphi-\varphi) + \imath\sin(\varphi-\varphi)\big) = 1$.
Ha

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \imath\sin\varphi_1) \quad \text{és} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \imath\sin\varphi_2),$$

akkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \imath\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

Komplex szám reciprokának geometriai tartalma: z-nek az egységkörre vonatkozó tükörképét (inverzét) tükrözzük a valós tengelyre.



Komplex számok n-edik gyöke: Ha

$$w = t(\cos\phi + \imath\sin\phi) \quad \text{és} \quad z = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi),$$

akkor $w^n = z$ esetén

$$w^n = t^n(\cos n\phi + \imath\sin n\phi) = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi),$$

innen

$$t = \sqrt[n]{r} \quad \text{és} \quad n\phi - \varphi = k \cdot 360^\circ,$$

mivel az irányszögek 360° egészszámszorosával különbözhetnek, tehát $\phi = \dfrac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}$, ahol k tetszőleges egész szám. Így

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + \imath \sin\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$ választásával n darab különböző gyök adódik, k további értékeire ezek ismétlődnek. Tehát egy komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Példák:

1) Határozzuk meg a $z_1 = 4$ és $z_2 = -4$ komplex számok négyzetgyökét!

$$z_1 = 4 = 4(\cos 0^\circ + \imath \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt{z_1} = 2\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 0^\circ}{2} + \imath \sin\frac{\varphi + k \cdot 0^\circ}{2}\right) \qquad k = 0, 1 \quad \text{tehát}$$

$$\sqrt{z_1} = \begin{cases} 2(\cos 0^\circ + \imath \sin 0^\circ) = 2 \\ 2(\cos 180^\circ + \imath \sin 180^\circ) = -2 \end{cases}$$

$$z_2 = -4 = 4(\cos 180^\circ + \imath \sin 180^\circ)$$

$$\sqrt{z_2} = 2\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 180^\circ}{2} + \imath \sin\frac{\varphi + k \cdot 180^\circ}{2}\right) \qquad k = 0, 1 \quad \text{tehát}$$

$$\sqrt{z_2} = \begin{cases} 2(\cos 90^\circ + \imath \sin 90^\circ) = 2\imath \\ 2(\cos 270^\circ + \imath \sin 270^\circ) = -2\imath \end{cases}$$

2) Számítsuk ki a $z_1 = 5(\cos 40^\circ + \imath \sin 40^\circ)$ és $z_2 = 3(\cos 18^\circ + \imath \sin 18^\circ)$ komplex számok szorzatát és hányadosát!

$$z_1 z_2 = 15\big(\cos(40^\circ + 18^\circ) + \imath \sin(40^\circ + 18^\circ)\big) = 15(\cos 58^\circ + \imath \sin 58^\circ)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}\big(\cos(40^\circ - 18^\circ) + \imath \sin(40^\circ - 18^\circ)\big) = \frac{5}{3}(\cos 22^\circ + \imath \sin 22^\circ)$$

3) Számítsuk ki az $\imath$ komplex szám harmadik gyökeit!

$$i = 1(\cos 90^\circ + \imath \sin 90^\circ)$$

$$\sqrt[3]{\imath} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + \imath\sin\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

$$\sqrt[3]{\imath}_1 = \cos 30^\circ + \imath \sin 30^\circ$$

$$\sqrt[3]{\imath}_2 = \cos\frac{90^\circ + 360^\circ}{3} + \imath\sin\frac{90^\circ + 360^\circ}{3} = \cos 150^\circ + \imath \sin 150^\circ$$

$$\sqrt[3]{\imath}_3 = \cos\frac{90^\circ + 720^\circ}{3} + \imath\sin\frac{90^\circ + 720^\circ}{3} = \cos 270^\circ + \imath \sin 270^\circ$$

4) Számítsuk ki a $z = 1$ komplex szám negyedik gyökeit!

$$1 = 1(\cos 0^\circ + \imath \sin 0^\circ)$$

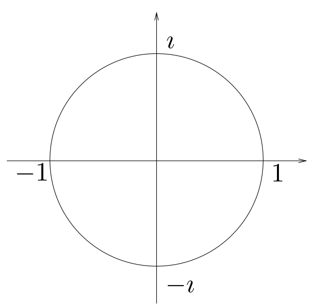
$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{4} + \imath\sin\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sqrt[4]{1}_1 = \cos 0^\circ + \imath \sin 0^\circ = 1$$

$$\sqrt[4]{1}_2 = \cos\frac{360^\circ}{4} + \imath\sin\frac{360^\circ}{4} = \cos 90^\circ + \imath \sin 90^\circ = \imath$$

$$\sqrt[4]{1}_3 = \cos\frac{720^\circ}{4} + \imath\sin\frac{720^\circ}{4} = \cos 180^\circ + \imath \sin 180^\circ = -1$$

$$\sqrt[4]{1}_4 = \cos\frac{1080^\circ}{4} + \imath\sin\frac{1080^\circ}{4} = \cos 270^\circ + \imath \sin 270^\circ = -\imath$$



5) Határozzuk meg annak a négyzetnek a csúcsait, amelynek A és B csúcsát a $z_a = 3 + 2\imath$ illetve a $z_b = 5 + 4\imath$ komplex számok jelölik ki a komplex számsíkon!

$$\overrightarrow{AB} = z_b - z_a = 2 + 2\imath$$

$\imath$-vel való szorzás pozitív 90°-os forgatást, $-\imath$-vel való szorzás negatív 90°-os forgatást jelent. Így

$$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AB} \cdot \imath = (2+2\imath)(\imath) = -2+2\imath, \qquad \overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\imath) = (2+2\imath)(-\imath) = 2-2\imath$$

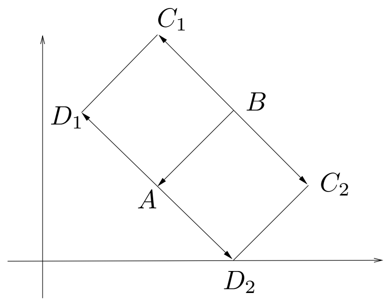
Ebből:

$$C_1 = z_b + \overrightarrow{AD_1} \longrightarrow 5 + 4\imath - 2 + 2\imath = 3 + 6\imath$$

$$D_1 = z_a + \overrightarrow{AD_1} \longrightarrow 3 + 2\imath - 2 + 2\imath = 1 + 4\imath$$

$$C_2 = z_b + \overrightarrow{AD_2} \longrightarrow 5 + 4\imath + 2 - 2\imath = 7 + 2\imath$$

$$D_2 = z_a + \overrightarrow{AD_2} \longrightarrow 3 + 2\imath + 2 - 2\imath = 5$$

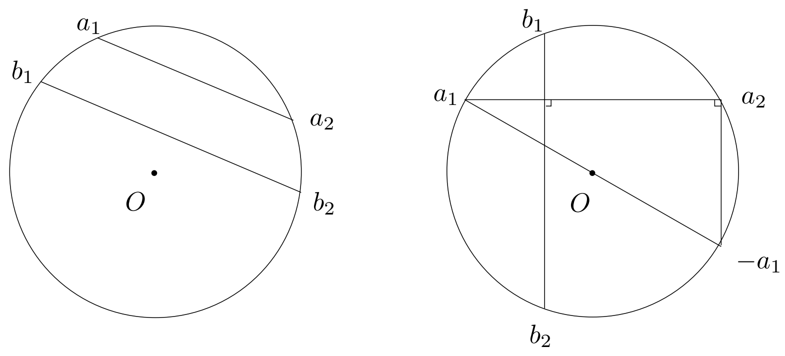


6) Mutassuk meg, hogy az O középpontú kör két húrjának a_1, a_2 illetve b_1, b_2 végpontjaira:

$$a_1 a_2 = b_1 b_2 \iff a_1 a_2 \parallel b_1 b_2$$

$$a_1 a_2 = -b_1 b_2 \iff a_1 a_2 \perp b_1 b_2$$

Párhuzamosság esetén: a_1-et b_1-be ugyanolyan szögű forgatás viszi, mint b_2-t a_2-be. Azaz $a_1 \cdot e = b_1$ illetve $a_2 \cdot e = b_2$. Innen $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$, tehát



$a_1a_2 = b_1b_2$. A bizonyítás megfordítható.

Merőlegesség esetén: $\overrightarrow{-a_1a_2}$ párhuzamos $\overrightarrow{b_2b_1}$-vel. Innen $-a_1a_2 = b_2b_1$, azaz $a_1a_2 = -b_1b_1$. A bizonyítás megfordítható.

7) Mi a geometriai helye a következő összefüggéseket kielégítő pontoknak:

a) $\|z-a\| = \|z-b\|$	*b*) $\mathrm{Re}(2z-1) = 5$	*c*) $\|z\| < 1 - \mathrm{Re}z$
d) $\mathrm{Im}z > 0$	*e*) $\|z-1\|\|z+1\| = a$	*f*) $\|z^2+2z-3\| = a$
g) $\mathrm{Re}z^2 = 4$	*h*) $\|z-\imath\| < 2$	*i*) $\left.\begin{array}{l} \|z\| < 3 \\ \|z-1\| > 1 \end{array}\right\}$

a) Az a és b pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegese.

b) Az $x = 3$ egyenes.

c) Az $y^2 = 1 - 2x$ parabola belseje.

d) Az $y > 0$ félsík (felső félsík).

e) ± 1 fókuszú lemniszkáták. Ha $a < 1$, akkor e lemniszkáták két önálló oválisból állnak, ha $a = 1$, akkor a Bernoulli-féle lemniszkátát kapjuk, ha $a > 1$, akkor zárt görbéket kapunk.

f) Lemniszkáták.

g) Az $x^2 - y^2 = 4$ hiperbola.

h) Az $M(0,1)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú kör belseje.

i) Az $x^2 + y^2 = 9$ és $(x-1)^2 + y^2 = 1$ körök közötti gyűrűszerű tartomány.

Feladatok:

1) Írja fel exponenciális alakban a $z = 1 + \imath\sqrt{3}$ és a $z = 1 - \cos\alpha + \imath\sin\alpha$ komplex számokat.

2) Számítsa ki és szerkessze meg a $z_1 z_2$ szorzatot, ha

a) $z_1 = 3 + 5\imath$	b) $z_1 = 3 + 5\imath$	c) $z_1 = 3 + 5\imath$
$z_2 = 1 - \imath$	$z_2 = 1 - \imath$	$z_2 = 1 - \imath$

3) Számítsa ki a $(2 - 3\imath)e^{\imath\frac{\pi}{3}}$ és a $(\cos 105° + \imath\sin 105°)(\cos 15° + \imath\sin 15°)$ szorzatokat.

4) Számítsa ki a $(\overline{2 + \imath})(4 - 7\imath)$ szorzatot.

5) A $z = 2 - \imath$ komplex számot – mint vektort – forgassa el 60°-kal és zsugorítsa felére az abszolútértékét.

6) A $z = 4 - 6\imath$ komplex számot – mint vektort – hány fokos szöggel kell elforgatni, hogy eredményül a $2\sqrt{3} + 3 + \imath(2 - 3\sqrt{3})$ komplex számot kapjuk?

7) Számítsa ki az $5e^{\imath\frac{2\pi}{3}}(4 - \imath)\left(\cos\frac{\pi}{3} + \imath\sin\frac{\pi}{3}\right)$ szorzatot.

8) Számítsa ki a következő hányadosokat:

a) $\dfrac{3 + 2\imath}{3 - 2\imath}$	*b*) $\dfrac{5 + \imath}{2 - \imath}$	*c*) $\dfrac{2 + 4\imath}{3 - 2\imath}$
d) $\dfrac{2 + 4\imath}{\cos 75° + \imath\sin 75°}$	*e*) $\dfrac{e^{\imath\frac{\pi}{6}}}{1 + \imath}$	*f*) $\overline{\left(\dfrac{2 - \imath}{e^{\imath\frac{\pi}{3}}}\right)}$
g) $\dfrac{\imath}{(1 - \imath)(2 + \imath)}$	*h*) $\dfrac{\cos 105° + \imath\sin 105°}{\cos 15° + \imath\sin 15°}$	*i*) $\dfrac{1 - \frac{1}{\imath}}{1 + \frac{1}{\imath}}$
j) $\dfrac{5 - 2\imath}{\imath}$	*k*) $\dfrac{1}{1 + \imath}$	*l*) $\dfrac{1 + \imath}{1 - \imath}$

9) Számítsa ki a következő hatványokat:

a) $(2 - \imath)^5$	*b*) $(\imath - 1)^{16}$	*c*) $\left(\dfrac{\imath}{1 - \imath}\right)^8$
d) $\left(\dfrac{(2 - \imath)(\overline{2 + 3\imath})}{\imath - 3}\right)^2$	*e*) $(\cos 15° + \imath\sin 15°)^{24}$	*f*) $\left(e^{\imath\frac{\pi}{6}}\right)^{18}$
g) $\left((\overline{1 + \imath})e^{\imath\frac{\pi}{4}}\right)^3$	*h*) $\left(\dfrac{1}{\imath}\right)^5$	*i*) $\left(\dfrac{1 + \imath}{1 - \imath}\right)^4$

10) A $(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \imath \sin n\varphi$ összefüggés felhasználásával igazolja, hogy

$$\cos 6\varphi = \cos^6\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin^6\varphi,$$

illetve

$$\sin 8\varphi = 8\sin\varphi\cos^7\varphi - 56\sin^3\varphi\cos^5\varphi + 56\sin^5\varphi\cos^3\varphi - 8\sin^7\varphi\cos\varphi.$$

11) Végezze el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt[3]{-8}$	*b)* $\sqrt[4]{-2}$	*c)* $\sqrt[3]{5\imath}$
d) $\sqrt{-1+\imath}$	*e)* $\sqrt[4]{1+\imath\sqrt{3}}$	*f)* $\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{4} + \imath\sin\frac{3\pi}{4}}$
g) $\sqrt[4]{\frac{1}{1-\imath}(-1+\imath)}$	*h)* $\sqrt[3]{-1}$	*i)* $\sqrt[5]{-1}$
j) $\sqrt[8]{1}$	*k)* $\sqrt[6]{8e^{\imath\frac{\pi}{3}}}$	*l)* $\sqrt[3]{\imath e^{\imath\frac{3\pi}{4}}}$

12) Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $x^5 - 1 = 0$	*b)* $x^6 + 64 = 0$	*c)* $5z^2 = 128\imath$
d) $9z^3 - \frac{1}{3} = 0$	*e)* $(6-z)^6 + 1 = 0$	*f)* $z^4 - 81\imath = 0$

13) Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{r} z_1 + 2z_2 = 1+\imath \\ 3z_1 + \imath z_2 = 2 - 3\imath \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} (1+\imath)z_1 - (1-\imath)z_2 = 0 \\ (2+\imath)z_1 - (1-2\imath)z_2 = 0 \end{array}\right\}$