Feladatok – Halmazelmélet

1. Írjuk fel az $\{a, b, c\}$ halmaz összes részhalmazát. Hány részhalmaz van? És ha a halmaz elemeinek száma n?

2. Legyen A a budapest egyetemi hallgatók, B a budapesti egyetemista fiúk, C a budapesti egyetemista lányok halmaza. Állapítsuk meg, igazak-e a következő állítások:
a) $B \subset A$ *b)* $B \cup C = A$

3. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik nem (A és B tetszőleges halmazok):

a) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ *b)* $(A \cap B) \subset A$

c) $(A \cap B) \subset (A - B)$ *d)* $(A - B) \subset (A \cup B)$

e) $\overline{(A \cup B)} \not\subset \overline{A}$ *f)* $(A - B) \not\subset B$

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges X és Y halmazok esetén:

$$(X \cap Y) \subset [X - (X - Y)] \qquad \text{és} \qquad [X - (X - Y)] \subset (X \cap Y)\,.$$

5. Legyenek A, B és C a H alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Írjuk fel a halmazokra értelmezett műveletek segítségével a H azon elemeinek halmazát, amelyek

a) csak a B halmaznak elemei,
b) pontosan két halmaznak elemei,
c) nem elemei mindhárom halmaznak,
d) legfeljebb egy halmaznak elemei,
e) legalább egy halmaznak elemei,
f) legalább két halmaznak elemei.

6. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ *b)* $(A \cup B) \cap (B \cup B)$ *c)* $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

7. Állapítsuk meg, hogy a következő összefüggések közül, amelyekben A, B és C tetszőleges halmazok, melyek igazak és melyek nem. (Célszerű a vizsgálatokat Venn-diagramokkal kezdeni, majd azokat, amelyek igaznak bizonyulnak, valamilyen módon be is bizonyítani.)

a) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

b) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (B \cup C)$

c) $[A - (A - \overline{B})] \cup B = A \cup B$

d) $(A \cup B) - A = B$

e) $\overline{(A \cup B)} - \overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

8. Igazoljuk, hogy ha $A - B = B - A$, akkor $A = B$.

9. Igazoljuk, hogy minden A, B és C halmaz esetén érvényesek a következő egyenlőségek (azonosságok):

a) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

b) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$

d) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha A és C diszjunktak, akkor az

$$A - B, \quad A - \overline{B}, \quad (B - A) - C, \quad B - \overline{C}, \quad \text{és} \quad C - B$$

halmazok is páronként diszjunktak.

11. Legyenek A_1, A_2, A_3 és A_4 páronként diszjunktak és egyesítésük legyen a H halmaz. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $B \subset H$ halmazra

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup (A_4 \cap B)$$

és a jobb oldal tagjai páronként diszkunktak.

A következő feladatokban $\mathbb{N}$ a természetes számok, azaz a nemnegatív egészek halmazát, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok, $\mathbb{R}$ pedig a valós számok halmazát jelenti.

12. Legyen $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páros}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}$. Állapítsuk meg, mik lesznek az

$$X = [A - (B \cap C)] \cup [(A - B) - C]$$

halmaz elemei.

13. Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0,\ x \leq 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ 2-vel osztható egész szám}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 6k + 1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Állapítsuk meg, A, B és C közül melyik részhalmaza a természetes számok halmazának.

14. Legyen $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. Írjuk fel az

$$(X \times Y) \cap (Y \times X) \quad \text{és az} \quad (X \times Y) - (Y \times X)$$

halmazok elemeit.

15. Legyen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = cx + d\}$$

Mit mondhatunk az a, b, c, d paraméterekről, ha tudjuk, hogy

a) $A - B = A$ *b)* $A - B = \emptyset$

c) $A \cap B = \{(0, 0)\}$ *d)* $\{(1, 0), (0, 1)\} \subset A \cap B$

16. Ábrázoljuk a

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$$

halmazokat a koordinátasíkon.

17. Írjuk fel a koordinátasík negatív abszcisszájú pontjainak halmazát a valós számok és a nemnegatív valós számok halmaza segítségével.

Természetes számokkal kapcsolatos állításokat gyakran igazolhatunk a *teljes indukció* módszerével. Ez lényegében két részből áll:

I. Keresünk olyan természetes számot, amelyre az állítás teljesül.

II. Feltételezzük, hogy n-re igaz az állítás, majd bebizonyítjuk, hogy ebből $(n+1)$-re is következik (öröklődik) az állítás érvényessége.

A következő feladatokban n mindig természetes számot jelent. A megoldást keresve, némelyeknél gondolhatunk a teljes indukció módszerére is.

18. Legyen az A_1 halmaz elemeinek száma k_1, az A_2 elemeinek száma k_2, ..., az A_n elemeinek száma k_n. Igazoljuk, hogy $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ elemeinek száma $k_1 k_2 \ldots k_n$.

19. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok esetén

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

és

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

A teljes indukció módszerét természetesen nem csak halmazokkal kapcsolatos feladatokra alkalmazhatjuk.

Igazoljuk teljes indukcióval a következő állításokat is:

20. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

21. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

22. $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

23. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

24. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

25. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

Keressünk képletet a következő összegek kiszámítására, majd igazoljuk ezeket teljes indukcióval:

26. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$

27. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

28. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

29. $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

30. $1!1+2!2+\cdots+n!n=(n+1)!-1$

A következő feladatokban szereplő egyenlőtlenségek is igazolhatók teljes indukcióval:

31. $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}>1, \quad \text{ha} \quad n\geq 2$

32. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}, \quad \text{ha} \quad n\geq 2$

33. $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}<4^{n-1}, \quad \text{ha} \quad n\geq 5$

34. $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}>\dfrac{4^n}{n+1}, \quad \text{ha} \quad n\geq 2$