Vektoralgebra

Vektorok összeadása, kivonása, szorzás számmal, koordináták, lineáris függetlenség

Feladatok:

1) A koordinátarendszerben úgy helyezzük el az egységkockát, hogy az origó az egyik csúcsba essék, a tengelyek pozitív fele pedig egy-egy kockaélt tartalmazzon. Adjuk meg a kockacsúcsok koordinátáit.

2) Egy szabályos hatszög középpontja $K(4,1,4)$, két szomszédos csúcsa $A(3,1,5)$ és $B(3,2,4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáit.

3) Az $ABCD$ paralelogramma csúcsai $A(3,-2,5)$, $B(0,1,0)$, $C(-5,2,7)$. Számítsuk ki a D csúcs koordinátáit.

4) Egy paralelogramma középpontja $K(-3,2,1)$, két szomszédos csúcsa $A(1,-1,3)$, $B(-7,0,0)$. Adjuk meg a másik két csúcs koordinátáit.

5) Egy paralelepipedon egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló élek végpontjai $A(3,6,-4)$, $B(-4,7,0)$, $C(9,1,-3)$. Számítsuk ki a többi négy csúcs koordinátáit.

6) Egy szabályos ötszög egyik csúcsának a koordinátái $A_1(1,0,0)$, középpontja az origó. Adjuk meg a többi csúcs koordinátáit.

7) Döntsük el, hogy kollineárisak-e a következő vektorpárok:

   a) $\mathbf{a}(-3,4,7)$ és $\mathbf{b}(2,5,1)$;

   b) $\mathbf{c}(12,9,15)$ és $\mathbf{d}(8,6,10)$;

   c) $\mathbf{e}(7,-4,2)$ és $\mathbf{f}(0,0,0)$.

8) Döntsük el, hogy az alábbi ponthármasok egy egyenesen vannak-e:

   a) $A(-4,5,2)$, $B(2,0,-3)$, $C(14,-10,-13)$;

   b) $D(0,3,5)$, $E(4,0,7)$, $F(4,-18,-23)$;

   c) $G(0,0,0)$, $H(14,-6,8)$, $I(-21,9,-12)$;

   d) $J(1,1,1)$, $K(4,1,7)$, $L(5,-1,-1)$.

9) Az adott $A(4,-1,3)$, $B(5,4,1)$ pontokhoz meghatározandók a $C(7,y,z)$ pont y, z koordinátái úgy, hogy az A, B, C pontok egy egyenesen legyenek.

10) Mik a $P(3,-4,8)$ pont $C(3,7,-2)$ pontra vonatkozó tükörképének a koordinátái?

11) Az $A(7,0,-1)$, $B(-2,4,0)$, $C(-5,4,2)$, $D(4,0,1)$ pontok egy paralelogramma négy csúcsa (mutassuk ezt meg!). A $P(1,3,-1)$ pontot tükrözzük az A-ra, a tükörképet B-re, az így nyert pontot a C-re, majd végül az így kapottat a D-re. Mik a negyedik tükörkép koordinátái? Általánosítsuk az eredményünket.

12) Adjuk meg a $\mathbf{v}(a_1,a_2,a_3)$ vektornak a koordinátasíkokon lévő vetületeit.

13) Komplanárisak-e a $3\mathbf{a}-4\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+7\mathbf{b}$, $-\mathbf{a}+43\mathbf{b}$ vektorok?

14) Adottak az $\mathbf{a}(2,-1,1)$, $\mathbf{b}(-1,3,0)$, $\mathbf{c}(1,0,7)$ vektorok. Bontsuk fel a $\mathbf{d}(9,-9,10)$ vektort $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ irányú összetevőkre.

15) Adottak az $\mathbf{a}(-8,7,1)$, $\mathbf{b}(0,3,2)$, $\mathbf{c}(1,-1,4)$ vektorok. Bontsuk fel a $\mathbf{d}(31,-37,19)$ vektort $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ irányú összetevőkre.

16) Bontsuk fel a $\mathbf{v}(13,56)$ vektort az $\mathbf{a}(2,7)$ és $\mathbf{b}(-3,0)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

17) Döntsük el, hogy az alábbi vektorhármasok lineárisan függetlenek-e:

a) $(-4,2,1)$, $(0,4,3)$, $(-4,6,4)$;

b) $(0,0,0)$, $(2,-9,7)$, $(-1,-1,0)$;

c) $(-9,-9,3)$, $(1,0,2)$, $(1,1,1)$;

d) $(-2,3)$, $(4,1)$, $(1,5)$.

18) Válasszuk ki az alábbi vektorok közül a független (nem kollineáris) vektorpárokat:

$$\mathbf{a}(4,-1,0),\quad \mathbf{b}(3,5,0),\quad \mathbf{c}(-8,2,0),\quad \mathbf{d}(-6,-10,2),\quad \mathbf{e}(0,0,0).$$

19) Döntsük el, függetlenek-e az alábbi vektorok:

$$\mathbf{a}(-1,5,19),\quad \mathbf{b}(17,1,4),\quad \mathbf{c}(-8,-9,-10),\quad \mathbf{d}(1,0,0).$$

Skaláris szorzat

Feladatok:

20. Az egységnyi élhosszúságú kockában az egy csúcsból kiinduló két lapátló vektora $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$.

    a) Számítsuk ki az $\mathbf{xy}$ szorzat értékét.

    b) Számítsuk ki $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ szögét.

21. Az ABC szabályos háromszög oldalhossza 2. Számítsuk ki az $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ szorzat értékét.

22. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{v}$ az egységkocka egy csúcsból kiinduló egyik élvektora és a testátló vektora. Számítsuk ki az $\mathbf{av}$ szorzat értékét és az $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ vektorok szögét.

23. Egy szabályos tetraéder egy csúcsából induló egyik élvektora $\mathbf{a}$, ebből a csúcsból a szemközti lap súlypontjába mutató vektor $\mathbf{s}$. Számítsuk ki az $\mathbf{as}$ szorzat értékét, ha a tetraéder élhossza 1.

24. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok páronként merőlegesek. Bizonyítsuk be, hogy

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2.$$

25. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{a}$ merőleges a következő vektorokra:

    a) $(\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$;

    b) $\mathbf{b} - \dfrac{\mathbf{a}(\mathbf{ab})}{\mathbf{a}^2}$.

26. Hogyan kell megválasztani β értékét, hogy $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ merőlegesek legyenek egymásra? ($\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem kollineáris vektorok.)

27.
    a) Három egységvektor páronként egyenlő szöget zár be egymással, összegük nullvektor. Mekkora ez a

    b) Négy egységvektor páronként egyenlő szöget zár be, összegük nullvektor. Mekkora ez a szög?

28. Adottak $\mathbf{a}(3, -2, 5)$ és $\mathbf{b}(-1, 0, 2)$ vektorok. Számítsuk ki a következő szorzatok értékét:

$$\mathbf{ab}, \qquad (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})\mathbf{a}, \qquad (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2, \qquad \mathbf{a}^2.$$

29. A szögek kiszámítása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék- vagy tompaszöget zárnak be egymással:

a)	$(-3,2,0),\ (4,1,5)$;	b)	$(1,-1,9),\ (2,1,3)$;
c)	$(1,1,1),\ (-10,7,3)$;	d)	$(5,-3,4),\ (1,-1,2)$.

30. Számítsuk ki az alábbi vektorok hosszát:

$\mathbf{a}(8,-14,-8)$; $\mathbf{b}(0,3,0)$; $\mathbf{c}\left(\frac{5}{31},-\frac{30}{31},\frac{6}{31}\right)$;

$\mathbf{d}(4,-9,10)$; $\mathbf{e}(24,-7)$; $\mathbf{f}(1,1)$.

31. Adjuk meg az alábbi vektorokkal egyirányú egységvektorok koordinátáit:

$\mathbf{a}(4,-12,3)$; $\mathbf{b}(0,0,-7)$; $\mathbf{c}(1,2,-3)$;

$\mathbf{d}(-5,0,12)$; $\mathbf{e}(12,-5)$; $\mathbf{f}(9,9)$.

32. Adjuk meg az alábbi vektorok irányába mutató egységvektorokat:

$$\mathbf{v}_1(-3,0,4);\quad \mathbf{v}_2(0,0,-6);\quad \mathbf{v}_3(-1,4,-8);\quad \mathbf{v}_4(9,16,-3).$$

33. Számítsuk ki a következő vektorpárok szögét:

a) $\mathbf{a}(7,-1,6)$, $\mathbf{b}(2,20,1)$;

b) $\mathbf{c}(3,6,-2)$, $\mathbf{d}(5,4,-20)$;

c) $\mathbf{e}(9,1,4)$, $\mathbf{f}(4,9,1)$;

d) $\mathbf{g}(-1,4,7)$, $\mathbf{h}(5,-2,0)$;

e) $\mathbf{m}(4,-9)$, $\mathbf{n}(2,5)$.

34. Adottak $\mathbf{a}(3,-6,1)$ és $\mathbf{b}(12,4,z)$ vektorok. Határozzuk meg z értékét úgy, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek legyenek egymásra.

35. Az ABC háromszög csúcsainak a koordinátái $A(-3,4,0)$, $B(-9,11,42)$, $C(1,2,4)$.

a) Mekkora a háromszög területe?
b) Mekkora az A csúcsnál fekvő szöge?

36. Bontsuk fel az $\mathbf{a}(3,-6,9)$ vektort a $\mathbf{b}(2,-2,1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

37. Bontsuk fel az $\mathbf{c}(3, 6, -2)$ vektort a $\mathbf{d}(5, 4, -20)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

38. Mekkora a $\mathbf{v}(-9, 1, 1)$ vektornak a $\mathbf{a}(5, -6, 30)$ irányú egyenesen lévő vetülete?

39. Adjunk meg olyan vektort, amely felezi az $\mathbf{a}(-1, 4, 8)$ és $\mathbf{b}(-5, 4, 20)$ vektorok szögét.

40. Az $ABCD$ téglalap csúcsainak koordinátái: $A(2, 6, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(-2, 8, z)$. Számítsuk ki z értékét és a D csúcs koordinátáit.

41. Egy négyzet két csúcsának koordinátái: $A(5, 4, -3)$, $B(4, 6, -1)$, egy oldala pedig párhuzamos a $\mathbf{v}(4, -2, z)$ vektorral. Számítsuk ki a négyzet másik két csúcsának a koordinátáit.

Vektoriális szorzat

Feladatok:

42. Igazoljuk a következő azonosságokat:

    a) $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$;

    b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = (\mu - \lambda)(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$;

    c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;

    d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

43. Számítsuk ki az $\mathbf{a}(2, -2, 1)$ és $\mathbf{b}(2, 3, 6)$ vektorok szögének szinuszát.

44. Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{u}$ tetszőleges vektorok. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a} \times \mathbf{u}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{u}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{u}$ vektorok komplanárisak.

45. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorokra fennállnak az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$ egyenlőségek. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorok kollineárisak.

46. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ akkor és csakis akkor helyvektora három kollineáris pontnak, ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

47. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ egy sík három nem kollineáris pontjának helyvektorai. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ a sík egy normálvektora.

48. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ egyenlőség egyenértékű az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ egyenlőséggel. ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ között nincs két kollineáris.)

49. Számítsuk ki annak a paralelogrammának a területét, amelynek élvektorai $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$:

a) $\mathbf{a}(-4,1,2)$, $\mathbf{b}(5,2,7)$;

b) $\mathbf{a}(-9,0,9)$, $\mathbf{b}(7,2,-5)$;

c) $\mathbf{a}(1,-7)$, $\mathbf{b}(-3,2)$.

50. Számítsuk ki az ABC háromszög területét, ha

a) $A(0,0,0)$, $B(-1,4,7)$ $C(5,2,1)$;

b) $A(1,0,2)$, $B(4,3,8)$ $C(0,-4,6)$;

c) $A(3,6)$, $B(2,-7)$ $C(4,4)$;

d) $A(4,-1,-3)$, $B(3,1,-2)$ $C(1,5,0)$.

51. Számítsuk ki az $\mathbf{a}(a_1,a_2)$, $\mathbf{b}(b_1,b_2)$ vektorok által kifeszített háromszög területét.

52. Számítsuk ki az ABC háromszög B csúcsához tartozó magasság hosszát, ha a csúcsok koordinátái: $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$.

53. Adjunk meg olyan $\mathbf{x}$ vektort, amely merőleges az $\mathbf{a}(2,-3,1)$ és $\mathbf{b}(1,-2,3)$ vektorokra, és a $\mathbf{c}(1,2,-7)$ vektorral szorozva: $\mathbf{cx}=10$.

54. Adjuk meg az x és y értékeket úgy, hogy a $\mathbf{c}(x,y,16)$ merőleges legyen az $\mathbf{a}(1,5,4)$ és $\mathbf{b}(-1,3,1)$ vektorokra.

55. Egy kocka egy csúcsából kiinduló két élvektora $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Fejezzük ki ezek segítségével a csúcsból kiinduló harmadik élvektort.

Többtényezős vektorszorzatok; vegyesszorzat, kifejtési tétel

Feladatok:

56. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ egységvektorok közül $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra, $\mathbf{c}$ pedig $30°$-os szöget zár be síkjukkal. Számítsuk ki $\mathbf{abc}$ értékét.

57. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ egy tégla egy csúcsból kiinduló élvektorai, akkor $\mathbf{abc}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$.

58. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nem komplanáris vektorok. Komplanárisak-e: $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $5\mathbf{b}-4\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$?

59. Mekkora az $\mathbf{a}(2,3,4)$, $\mathbf{b}(2,3,1)$, $\mathbf{c}(1,2,3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?

60. Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder térfogatát:

    a) $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$;

    b) $A(0,0,0)$, $B(-2,2,3)$, $C(0,2,-1)$, $D(4,0,1)$.

61. Az $ABCD$ tetraéder térfogata 5 egység. Mik a D csúcs koordinátái, ha D az y tengelyen van, és a másik három csúcs: $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$?

62. Döntsük el, hogy komplanárisak-e az alábbi vektorhármasok:

    a) $(2,3,-1)$, $(1,-1,3)$, $(1,9,-11)$;

    b) $(3,-2,1)$, $(2,1,2)$, $(3,-1,-2)$;

    c) $(2,-1,2)$, $(1,2,-3)$, $(3,-4,7)$.

63. Döntsük el, hogy egy síkban vannak-e az alábbi pontnégyesek:

    a) $(1,2,-1)$, $(0,1,5)$, $(-1,2,1)$, $(2,1,3)$;

    b) $(1,2,0)$, $(0,1,1)$, $(3,5,-4)$, $(-4,-2,6)$.

64. Válasszuk meg z értékét úgy, hogy az $\mathbf{a}(4,-1,2)$, $\mathbf{b}(1,2,3)$, $\mathbf{c}(3,3,z)$ vektorok komplanárisak legyenek.

65. Mekkora az $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$ csúcsokkal rendelkező tetraéder D-hez tartozó magassága?

66. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

    a) $(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})\mathbf{b}\mathbf{c}=\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}$;

    b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a})=2\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}$;

    c) $\mathbf{a}\mathbf{b}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})=\gamma\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}$;

    d) $(\mathbf{a}+\mathbf{v})(\mathbf{b}+\mathbf{v})(\mathbf{c}+\mathbf{v})=\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}+\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{v}+\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{v}+\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{v}$.

67. Bizonyítsuk be, hogy

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2.$$

(Lagrange-féle azonosság)

68. Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ független vektorok, és legyen $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$. Fejezzük ki az α, β, γ együtthatókat az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok segítségével.

69. Adottak az $\mathbf{a}(2,-3,1)$, $\mathbf{b}(4,2,-1)$, $\mathbf{c}(1,0,-3)$ vektorok. Számítsuk ki az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ koordinátáit.

70. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges vektorok. Mutassuk meg, hogy $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = \mathbf{a}^2\mathbf{b}$.