1. Függvények

1) Adja meg a következő függvények legbővebb értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{5-10x}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2+x+1}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$

d) $\lg \mathrm{tg} x$

e) $\ln x + \ln(-x)$

Megoldás:

a) $5-10x \geq 0$
$\dfrac{1}{2} \geq x$

b) $x^2+x+1 \neq 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$

c) $\sqrt{x-|x|} \neq 0$ és $x-|x| \geq 0$ sosem teljesül.

d) $\mathrm{tg}\, x$: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ esetén van értelmezve.
$\lg \mathrm{tg}\, x$: $\mathrm{tg}\, x > 0$, azaz $\dfrac{\pi}{2} + k\pi > x > k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$, tehát ez utóbbi az értelmezési tartomány.

e) $x > 0$ és $-x > 0$ egyszerre kellene, hogy teljesüljön. Vagyis az értelmezési tartomány $\emptyset$.

2) Határozza meg az $\dfrac{1}{f}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, ha

a) $f(x) = 2 - \cos 3x$

b) $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$

Megoldás:

a) $2-\cos 3x \neq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re teljesül, vagyis az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$.
$1 \leq 2-\cos 3x \leq 3$
Innen az értékkészlet: $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2-\cos 3x} \leq 1.$

b) $2+x-x^2 > 0$
$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Longrightarrow x_1 = -1\,;\, x_2 = 2$
Az értelmezési tartomány tehát: $-1 < x < 2$.

Teljes négyzetté alakítással:

$2+x-x^2=-\left(x^2-x-2\right)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

Ennek a teljes négyzetnek az értelmezési tartományon belül szélsőértéke van $\frac{1}{2}$-nél és 2-nél. Előbbinél maximum van, értéke $f\left(x_{\max}\right)=\sqrt{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$, a minimumhelye $x_{\min}=2$-nél van, értéke $f\left(x_{\min}\right)=0$. Az $\frac{1}{f}$ függvénynek tehát minimuma van $\frac{2}{3}$-nál, maximuma nincs (hiszen az f tetszőlegesen kicsi pozitív értéket felvehet), vagyis az értékkészlet: $\frac{2}{3}<y$.

3) Hogyan változik az f függvény transzfolmáltjainak értelmezési tartománya és értékkészlete, ha $D_f=[-1,2]\setminus\{0\}$, és $R_f=[3,\infty[$

a) $f\left(x+8\right)$

b) $f\left(-2x\right)$

c) $f\left(x^3\right)$

d) $2f\left(x\right)$

e) $5f\left(x\right)-6$

f) $f^2\left(x\right)$

g) $-f\left(-x\right)-1$

h) $\dfrac{2}{3}f\left(3x-1\right)+5$

Megoldás:

Az első három függvény csak belső transzformációt tartalmaz, ezért R_f változatlan.

a) $x+8\in[-1,2]\setminus\{0\}\Longrightarrow x\in[-9,-6]\setminus\{-8\}$

b) $-2x\in[-1,2]\setminus\{0\}\Longrightarrow x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]\setminus\{0\}$

c) $x^3\in[-1,2]\setminus\{0\}\Longrightarrow x\in\left[-1,\sqrt[3]{2}\right]\setminus\{0\}$

A második három függvény csak külső transzformációt tartalmaz, ezért D_f változatlan.

d) $f\left(x\right)\in[3,\infty[\Longrightarrow 2f\left(x\right)\in[6,\infty[$

e) $f\left(x\right)\in[3,\infty[\Longrightarrow 5f\left(x\right)-6\in[9,\infty[$

f) $f\left(x\right)\in[3,\infty[\Longrightarrow f^2\left(x\right)\in[9,\infty[$

Az utolsó két esetben mindkét tartomány módosul:

g) $D_f: \ -x \in [-1,2] \setminus \{0\} \Longrightarrow x \in [-2,1] \setminus \{0\}$
$R_f: \ f(x) \in [3,\infty[\ \Longrightarrow -f(x) - 1 \in \ ]-\infty, -4]$

h) $D_f: \ 3x - 1 \in [-1,2] \setminus \{0\} \Longrightarrow 3x \in [0,3] \setminus \{1\} \Longrightarrow x \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$
$R_f: f(x) \in [3,\infty[\ \Longrightarrow \frac{2}{3} f(x) \in [2,\infty[\ \Longrightarrow \frac{2}{3} f(x) + 5 \in [7,\infty[$

4) Milyen geometriai transzformációval származik az $f(x)$ grafikonjából az $|f(x)|$, illetve a $f|x|$ függvények grafikonja?

Megoldás:

$|f(x)|$-nél a függvény x tengely alatti részét x-re tükrözzük; $f|x|$-nél az y-tól jobbra eső rész változatlan marad, és ezt y-ra tükrözzük.

5) Az alábbi, paraméteresen adott egyváltozós függvények egyenletrendszeréből küszöböljük ki a paramétert!

a) $\left.\begin{aligned} x &= \sin t \\ y &= \cos 2t \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x &= t^2 + 2t \\ y &= t^2 + 2t + 3 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{1+t^2}} \\ y &= \frac{at}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x &= 10^t + 10^{-t} \\ y &= 10^t - 10^{-t} \end{aligned}\right\}$

Megoldás:

a) $y = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - x^2 - x^2 = 1 - 2x^2$

b) $y = x + 3$

c) $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2 + a^2 t^2}{1 + t^2} = a^2$

d) $x^2 - y^2 = 10^{2t} + 10^{-2t} - 10^{2t} + 2 - 10^{-2t} = 4$