Függvények határértéke

1) Bizonyítsa be a határérték definíciója alapján, hogy

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$$

teljesül!

Megoldás (Heine definíciója alapján):

Igazolandó, hogy a függvény értelmezve van a 2 egy környezetében, továbbá $\forall \{x_n\} \to 2$ esetén $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3x_n+1}{5x_n+4} = \dfrac{1}{2}$ fennáll.

Jelöljük f-fel a függvényt! Ekkor $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{5}\right\}$, azaz a függvény a 2 egy környezetében valóban értelmezve van.

$$\lim_{n \to \infty} = \frac{3x_n+1}{5x_n+4} = \frac{3 \lim x_n + 1}{5 \lim x_n + 4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

Megoldás (Cauchy definíciója alapján):

Igazolandó, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, úgy, hogy $0 < |x-2| < \delta$ esetén f értelmezve van x-ben, továbbá $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3x+1}{5x+4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-2}{2(5x+4)}\right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{x-2}{2(5x+4)} < \varepsilon$$

$$-2\varepsilon(5x+4) < x - 2 < 2\varepsilon(5x+4)$$

Innen a két relációt kettébontjuk. Az első reláció:

$$-10\varepsilon x - 8\varepsilon < x - 2$$

$$2 - 8\varepsilon < x(1 + 10\varepsilon)$$

$$\frac{2 - 8\varepsilon}{1 + 10\varepsilon} < x$$

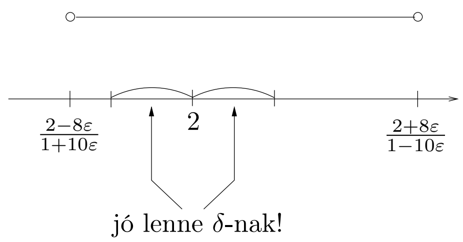
A második reláció:

$$x - 2 < 10\varepsilon x + 8\varepsilon$$

$$x(1 - 10\varepsilon) < 8\varepsilon + 2 \quad \varepsilon < 0{,}1 \text{ esetén}$$

$$x < \frac{8\varepsilon + 2}{1 - 10\varepsilon}$$

Ábrázoljuk a két relációnak eleget tevő x értékeket számegyenesen!



1. ábra. Alkalmas delták helyzete a számegyenesen

$$2-\frac{2-8\varepsilon}{1+10\varepsilon}=\frac{2+20\varepsilon-2+8\varepsilon}{1+10\varepsilon}=\frac{28\varepsilon}{1+10\varepsilon}$$
$$\frac{2+8\varepsilon}{1-10\varepsilon}-2=\frac{2+8\varepsilon-2+20\varepsilon}{1-10\varepsilon}=\frac{28\varepsilon}{1-10\varepsilon}$$

A két kifejezés közül a felső a kisebb, ezért ez alkalmas is δ-nak.

2) Számítsuk ki a régi jegyzetben szereplő függvényhatárértékeket!

3) Határozzuk meg az alábbi függvények határértékeit!

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[3]{x^2-4}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\cos x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{\pi}{6x}$

Megoldás:

a) A nevezőben lévő gyökjelet az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ nevezetes azonosság segítségével elimináljuk, így a $(x+1)$ tényezővel le lehet egyszerűsíteni:

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{6x^2+3-9x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{3\left(1-x^2\right)}=$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3\left(1-x\right)}=\frac{3+3}{6}=1$$

b) A számlálóban lévő gyökjelet nevezetes azonosság segítségével kiküszöböljük, majd az $x^{\frac{4}{3}}$ tényezőt bevisszük a gyökjelek alá:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[3]{x^2-4}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+4}\sqrt[3]{x^2-4}+\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+4}\sqrt[3]{x^2-4}+\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}}\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)^3\right]}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+\sqrt[3]{x^4-16}+\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}}\overbrace{\left[\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\right]}^{8}}{\sqrt[3]{x^4+8x^2+16}+\sqrt[3]{x^4-16}+\sqrt[3]{x^4-8x^2+16}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{16}{x^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}}} = \frac{8}{3}$$

c) A változó transzformációjával 0-hoz tartó határértékké alakítunk:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\cos x} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{2}-2\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)} \overset{*}{=}$$

Addíciós összefüggések segítségével tovább alakítunk úgy, hogy ne $\frac{0}{0}$ alakú legyen a határérték:

$$\overset{*}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{2}-2\left(\cos z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{2}\left(1-\cos z-\sin\right)} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{2}\left(2\sin^2\frac{z}{2}-2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z2}{\sqrt{2}\left(\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{z}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) A függvényt a tört bővítésével $\frac{\sin x}{x}$ alakú határértékké alakítjuk át:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{6}\frac{\sin\frac{\pi}{6x}}{\frac{\pi}{6x}} = \frac{\pi}{6}$$

4) Határozza meg a következő függvények bal és jobb oldali határértékét az adott helyen!

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3-x]{4}}$ $\quad x_0 = 3$

b) $\dfrac{1}{\left(x-1\right)^6}$ $\quad x_0 = 1$

Megoldás:

a) *Jobb oldali határérték:* Változótranszformációval 0-hoz tartó határértékké alakítunk $x = 3 - h$ $(h > 0)$ helyettesítéssel:

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{1}{1 + \sqrt[3-x]{4}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{h}}} = 0$$

Bal oldali határérték: A módszer hasonló, azonban itt a transzformációs összefüggés $x = 3 + h$, ahol $h > 0$.

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{1}{1 + \sqrt[3-x]{4}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + 4^{-\frac{1}{h}}} = 1$$

b) Itt is változótranszformációt végzünk:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{(x-1)^6} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^6} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{(x-1)^6} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(-h)^6} = +\infty$$

5) Vizsgálja meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából!

a) $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\dfrac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1}$

c) $\dfrac{1}{\sin 3x}$

Megoldás:

a) A számlálót és a nevezőt szorzattá alakítjuk:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)}$$

Ennek a függvénynek az értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, ezen a halmazon folytonos. Egyenként megvizsgáljuk azokat a pontokat, ahol a függvény nem folytonos.

Az $x_0 = 2$-ben vett bal és jobb oldali határértékek:

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = \frac{7}{1} = 7 = \lim_{x \to 2-0} f(x),$$

azaz $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$. Ezért a függvénynek itt hézagpontja van.
Az $x_0 = 1$-ben vett bal és jobb oldali határértékek:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = -\infty$$

Itt tehát nem létezik határérték, a függvénynek $x = 1$-ben *lényeges szingularitása* van. Ez ráadásul *pólus*, mert mindkét oldali határérték abszolútértékben ∞.

b) A függvény nem értelmezett, ha $x = 0$. (Mivel $2^{\frac{2}{x}} + 1 = 0$ sosem teljesül, ezért ez nem szűkíti tovább a D_f-t.) Az értelmezési tartomány tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ezen a halmazon a függvény folytonos.
Az $x = 0$-ban a bal és jobb oldali határértékek:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1} = 3$$

Tehát a függvénynek $x = 0$-ban lényeges szingularitása van.

c) A függvény nem értelmezett, ha $\sin 3x = 0$. Ez akkor áll fenn, ha:

$$3x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

A függvény értelmezési tartománya tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}$. A további vizsgálatot a k 3-mas osztási maradéka szerint végezzük el.
Ha $k = 3t\,, t \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}(3t)+0} f(x) = \lim_{x\to \pi t+0} \frac{1}{\sin 3t} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}(3t)-0} f(x) = \lim_{x\to \pi t-0} \frac{1}{\sin 3t} = -\infty$$

Hasonlóan a többi esetben:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}(3t+1)+0} f(x) = \lim_{x\to \pi t+\frac{\pi}{3}+0} \frac{1}{\sin 3t} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}(3t+1)-0} f(x) = \lim_{x\to \pi t+\frac{\pi}{3}-0} \frac{1}{\sin 3t} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}(3t+2)+0} f(x) = \lim_{x\to\pi t+\frac{2\pi}{3}+0} \frac{1}{\sin 3t} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}(3t+2)-0} f(x) = \lim_{x\to\pi t+\frac{2\pi}{3}-0} \frac{1}{\sin 3t} = -\infty$$

Látható ezek alapján, hogy minden szakadási helyen pólusa van a függvénynek.

6) Határozza meg a következő függvények aszimptotáinak egyenletét!

a) $\dfrac{3\left(x^2-5\right)}{2\left(x^2+1\right)}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x}$

Megoldás:

a) Az aszimptota $mx + c$ alakú egyenes, ahol

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad c = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right],$$

illetve olyan függőleges $x = x_0$ egyenes, melyre $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.
Ebben a példában $D_f = \mathbb{R}$, ezért függőleges aszimptota nincs.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \frac{3}{2} = c$$

Vagyis egy vízszintes aszimptota van, egyenlete $y = \dfrac{3}{2}$.

b) Az értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Belátjuk, hogy $x = 0$-ban aszimptotája van a függvénynek:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^2-4}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0-0} f(x) = +\infty,$$

vagyis az $x = 0$ egyenes valóban aszimptota.
Keressünk nem függőleges aszimptotát!

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x}}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-4}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{4}{x} = 0$$

A másik aszimptota tehát az $y = x$ egyenes.

7) Van-e valós megoldása az $x^4 - 5x^3 + x = 1$ egyenletnek?
Megoldás:
Az $f(x) = x^4 - 5x^3 + x - 1$ függvény folytonos. Könnyen ellenőrizhető, hogy $f(0) = -1 < 0$, valamint $f(5) = 4 > 0$, így Bolzano tétele szerint $\exists\, x \in [-1, 5] : f(x) = 0$, azaz a fenti egyenletnek van valós gyöke.

8) Mivel egyenlő az alábbi kifejezés:

$$\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$$

Megoldás:
Addíciós tétellel:

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right) = \\
&= \sin\arcsin\frac{4}{5}\cdot\cos\arcsin\frac{5}{13} + \sin\arcsin\frac{5}{13}\cdot\cos\arcsin\frac{4}{5} = \\
&= \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5} = \frac{48+15}{65} = \frac{63}{65}
\end{aligned}$$