Komplex számok

Elméleti áttekintés

- Komplex számok algebrai alakja: $z = a + ib$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és teljesül az $i^2 = -1$. Az a-t a z komplex szám valós részének, a b-t a z imaginárius részének nevezzük.
- Összeadása:
$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b').$$
- Szorzása:
$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$
- Hatványozás a binomiális tétellel:
$$(a + ib)^n = \sum_{k=0}^{n} (\, n \,)\, k a^k b^{n-k} i^{n-k}.$$
- A $z = a + ib$ konjugáltja:
$$\bar{z} = a - ib.$$
- A $z = a + ib$ modulusa:
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
- A $z = a + ib \neq 0$ inverze:
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$
- Komplex szám trigonometrikus alakja: $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r \geq 0$ valós szám. Ekkor a z valós része $r\cos\alpha$ és imaginárius része $r\sin\alpha$. Ebben az esetben $r = |z|$. Könnyen belátható, hogy $z = 0$ pontosan akkor, ha $r = 0$. Ha $z' = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$ és $z' \neq 0$, akkor $z = z'$ pontosan akkor, ha $r' = r$ és $\alpha - \alpha'$ a 360 fok (vagy 2π radián) egész számú többszöröse. Az $z \neq 0$ komplex szám esetén a α-t a z argumentumának nevezzük.
- Szorzás és osztás trigonometrikus alakban: ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = \mathbb{R}(\cos\beta + i\sin\beta)$ akkor
$$zw = rR(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)).$$
Ha $w \neq 0$ akkor
$$\frac{z}{w} = \frac{r}{R}(\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)).$$

- Hatványozás trigonometrikus alakban, Moivre képlete: ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor
$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

- Az $x^n = u$ egyenlet megoldásai. Ha $u = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, akkor a
$$z_k = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\phi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\phi}{n}\right)\right]$$
komplex számok $k = 0, 1, \ldots, n-1$-re a fenti egyenlet n különböző megoldását adják.

Gyakorlatok

1. Határozza meg azoknak a négyzeteknek a csúcsait, amelyeknek két csúcsát a $z_a = 3 + 2i$ és $z_b = 5 + 4i$ komplex számok jelölik ki a komplex számsíkon.

2. Számítsa ki és ábrázolja a $z_1 z_2$ szorzatot, ha

a) $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 1 - i$ **b)** $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = -3 + 2i$ **c)** $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 6 + 3i$

3. Számítsa ki a $(\cos 105° + i\sin 105°)(\cos 15° + i\sin 15°)$ és a $(\overline{2 + i})(4 - 7i)$ szorzatot!

4. A $z = 2 - i$ komplex számot – mint vektort – forgassa el $60°$-kal és zsugorítsa felére a modulusát.

5. A $z = 4 - 6i$ komplex számot – mint vektort – hány fokos szöggel kell elforgatni, hogy eredményül a $2\sqrt{3} + 3 + i(2 - 3\sqrt{3})$ komplex számot kapjuk?

6. Számítsa ki a következő hányadosokat:

a) $\dfrac{3 + 2i}{3 - 2i}$ **b)** $\dfrac{5 + i}{2 - i}$ **c)** $\dfrac{2 + 4i}{3 - 2i}$

d) $\dfrac{2 + 4i}{\cos 75° + i\sin 75°}$ **e)** $\dfrac{1}{1 + i}$ **f)** $\dfrac{i}{(1 - i)(2 + i)}$

g) $\dfrac{\cos 105° + i\sin 105°}{\cos 15° + i\sin 15°}$ **h)** $\dfrac{1 - \frac{1}{i}}{1 + \frac{1}{i}}$

7. Számítsa ki a következő hatványokat:

a) $(2 - i)^5$ **b)** $(i - 1)^{16}$ **c)** $\left(\dfrac{i}{1 - i}\right)^8$

d) $\left[\dfrac{(2 - i)\overline{(2 + 3i)}}{i - 3}\right]^2$ **e)** $(\cos 15° + i\sin 15°)^{24}$ **a)** $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^4$

8. A $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi$ összefüggés felhasználásával igazolja, hogy

$$\cos 6\varphi = \cos^6\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin^6\varphi,$$

illetve

$$\sin 8\varphi = 8\sin\varphi\cos^7\varphi - 56\sin^3\varphi\cos^5\varphi + 56\sin^5\varphi\cos^3\varphi - 8\sin^7\varphi\cos\varphi.$$

9. Végezze el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt[3]{-8}$ **b**) $\sqrt[4]{-2}$ **c**) $\sqrt[3]{5i}$

d) $\sqrt{-1+i}$ **e**) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$ **f**) $\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}}$

g) $\sqrt[3]{-1}$ **h**) $\sqrt[8]{1}$ **a**) $\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}}$

10. Oldja meg a következő egyeneleteket:

a) $x^5 - 1 = 0$ **b**) $x^6 + 64 = 0$ **c**) $5x^2 = 128i$

d) $9x^3 - \frac{1}{3} = 0$ **e**) $(6-x)^6 + 1 = 0$ **e**) $x^4 - 81i = 0$

11. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$ **b**) $\begin{cases} (1+i)z_1 - (1-i)z_2 = 0 \\ (2+i)z_1 - (1-2i)z_2 = 0 \end{cases}$