Vektorok a térben

Elméleti áttekintés

Egy (v_1, v_2, v_3) valós számokból álló hármast vektornak nevezzünk a térben ($\mathbb{R}^3$-ban). Használni fogjuk a $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ jelölést. A v_1, v_2, v_3-at a $\vec{v}$ vektor komponenseinek nevezzük. Tekintsük a $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ vektorokat és λ valós számot.

- *Összeadás*: $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.
- *Skalárral való szorzás*: $\lambda \cdot \vec{\mathbf{v}} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$.
- *A $\vec{\mathbf{v}}$ vektor hossza*: $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
- A $\vec{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)$ vektort *nullvektornak* nevezzük.
- *Kollinearitás*: a $\vec{\mathbf{v}}$ és $\vec{\mathbf{w}}$ kollineárisak, ha létezik olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, hogy $\vec{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{w}}$. Ha λ pozitív akkor azt mondjuk, hogy $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ egyirányúak.
- *Lineáris függő, illetve független vektorok.* A $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots \vec{\mathbf{v}}_n$ vektorokat lineárisan függő nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nem mind nulla valós számok, hogy
$$\lambda_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{\mathbf{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}.$$
Ellenkező esetben a $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük. A $\vec{\mathbf{v}}$ és $\vec{\mathbf{w}}$ vektorok lineárisan függetlenek, ha nem kollineárisak. Az $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ vektorok lineárisan függetlenek, ha az
$$\begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 w_1 = 0 \\ \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w_2 = 0 \\ \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 w_3 = 0 \end{cases}$$
λ-kban három ismeretlenes egyenletrendszernek csak a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 0$ megoldása van. Háromnál több vektor mindig lineárisan összefügg. Megjegyezzük, hogy a nullvektor mindenkivel összefügg. Tehát, ha a null vektor szerepel a vektorok egy felsorolásában, akkor azok a vektorok lineárisan összefüggnek.
- *Két vektor skalárszorzata.* Ha $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ két vektor akkor az ezek skalárszorzata a
$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$
szám. Megjegyezzük, hogy $|\vec{\mathbf{v}}|^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$. A skalárszorzat tulajdonságai:
  1. $\vec{\mathbf{0}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$ minden $\vec{\mathbf{u}}$ vektor esetén,
  2. $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ esetén,
  3. $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ esetén,
  4. $(\lambda \vec{\mathbf{u}}) \cdot = \lambda(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$ minde $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektorok és λ valós szám esetén,

5. $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}| \cos(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$, ahol $\cos(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ az $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ vektorok szöge.

- *Merőlegesség.* Két nem nulla vektort merőlegesnek nevezzünk, ha skalárszorzatuk nulla.

- *Vektori szorzat.* Az $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok vektori szorzata a

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

vektor. A vektori szorzatnak a következő tualjdonságai vannak:

1. $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ minde $\vec{\mathbf{u}}$ vektor esetén,
2. $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektorok esetén,
3. $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ esetén,
4. $(\lambda \vec{\mathbf{u}}) \times \vec{\mathbf{v}} = \lambda(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektor és λ valós szám esetén,
5. ha $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ nem nulla vektorok és $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, akkor ez a két vektor kollineáris,
6. $(\lambda \vec{\mathbf{u}} + \mu \vec{\mathbf{v}}) \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektorok és λ, μ valós számok esetén, tehát az $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ merőleges az $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ vektorok által meghatározott síkra.
7. $|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}| = |\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}| \sin(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ minden nem nulla $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ vektor esetén

A vektori szorzat geometriai jelentése: $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ vektori szorzat merőleges az $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ vektorokra, hosszát az utolsó tulajdonság adja meg, míg az irányítását a jobbkézszabály.

- *Vegyes szorzat.* Az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorok vegyes szorzata az $\vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$ valós szám melyet $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$-vel is jelölünk. A vegyes szorzat tulajdonságai:

1. Az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorok esetén

$$(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{u}}) = -(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}) = \dots.$$

2. A vegyes szorzat lineáris mindhárom változóban, azaz

$$(\lambda \vec{\mathbf{u}} + \lambda' \vec{\mathbf{u}}', \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = \lambda(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) + \lambda'(\vec{\mathbf{u}}', \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}),$$

$$(\vec{\mathbf{u}}, \lambda \vec{\mathbf{v}} + \lambda' \vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{w}}) = \lambda(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) + \lambda'(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{w}}),$$

$$(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \lambda \vec{\mathbf{w}} + \lambda' \vec{\mathbf{w}}') = \lambda(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) + \lambda'(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}').$$

3. Az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ nem nulla vektorok esetén $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = 0$ pontosan akkor, ha az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorok lineárisan függőek.

A vegyes szorzat geometriai jelentése: a $|(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})|$ szám a $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorok, mint élek által alkotott paralelepidon térfogata.

- Megjegyzés a lineáris függőség, függetlenséghez. A $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ pontosan akkor lineárisan függőek, ha a $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$ vegyes szorzat nulla. Továbbá az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektorok lineárisan függőek pontosan akkor, ha $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Gyakorlatok

1. Tekintsük az $\vec{\mathbf{a}}(-8,7,1)$, $\vec{\mathbf{b}}(0,3,2)$ és $\vec{\mathbf{c}}(1,-1,4)$ vektorokat. Bontsa fel a $\vec{\mathbf{d}}(31,-37,19)$ vektort $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ és $\vec{\mathbf{c}}$ irányú összetevőkre. (Keressük meg azokat a λ, μ, ν valós számokat, amelyre $\vec{\mathbf{d}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}} + \nu\vec{\mathbf{c}}$.)

2. Döntse el, hogy az alábbi vektorhármasok lineárisan függetlenek-e?

a) $(-4,2,1)$, $(0,4,3)$, $(-4,6,4)$;

b) $(0,0,0)$, $(2,-9,7)$, $(-1,-1,0)$;

c) $(-9,9,3)$, $(1,0,2)$, $(1,1,1)$;

3. Számítsa ki az alábbi vektorok hosszát:

$\vec{\mathbf{a}}(8,-14,8)$, $\vec{\mathbf{b}}(0,3,0)$, $\vec{\mathbf{c}}(\frac{5}{31}, -\frac{30}{31}, \frac{6}{31})$, $\vec{\mathbf{d}}(4,-9,10)$.

4. Adja meg az alábbi vektorokkal egyirányú egységvektorok koordinátáit:

$\vec{\mathbf{a}}(4,-12,3)$, $\vec{\mathbf{b}}(0,0,-7)$, $\vec{\mathbf{c}}(1,2,-3)$, $\vec{\mathbf{d}}(-5,0-,12)$.

5. Számítsa ki a következő vektorpárok szögét:

a) $(7,-1,6)$, $(2,20,2)$;

b) $(3,6,-2)$, $(5,4,-20)$;

c) $(9,1,4)$, $(5,4,-20)$;

d) $(-1,4,7)$, $(5,-2,0)$;

e) $(4,-9)$, $(2,5)$.

6. Bontsa fel az $\vec{\mathbf{a}}(3,-6,9)$ vektort a $\vec{\mathbf{b}}(2,-2,1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

7. Adjon meg olyan vektort, mely felezi az $\vec{\mathbf{a}}(-1,4,8)$ és $\vec{\mathbf{b}}(-5,4,20)$ vektorok szögét.

8. Legyenek $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ és $\vec{\mathbf{u}}$ tetszőleges vektorok. Bizonyítsuk be, hogy az $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{u}}$ vektorok koplanárisak.

9. Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder térfogatát:

a) $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,1)$, $D(4,1,3)$;
b) $A(0,0,0)$, $B(-2,2,3)$, $C(0,2,-1)$, $D(4,0,1)$;
c) $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(0,0,1)$.

10. Döntse el, hogy egy síkban vannak-e az alábbi pontok:

a) $(1,2,-1)$ $(0,1,5)$ $(-1,2,1)$ $(2,1,3)$;
b) $(1,2,0)$ $(0,1,1)$ $(3,5,4)$ $(-4,-2,6)$.

11. Adottak az $\vec{\mathbf{a}}(2,-3,1)$, $\vec{\mathbf{b}}(4,2,-1)$, $\vec{\mathbf{c}}(1,0,-3)$ vektorok. Számítsa ki az $(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \times \vec{\mathbf{c}}$ koordinátáit.