Egyenes és sík a térben

Elméleti áttekintés

- Az egyenes paraméteres egyenlete:
$$\begin{cases} X = u_1\lambda + x_0 \\ Y = u_2\lambda + y_0 \\ Z = u_3\lambda + z_0 \end{cases},$$
ahol a λ egy valós paraméter. Az $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ az egyenes irányvektora és $P(x_0, y_0, z_0)$ egy pont az egyenesről. Az $\vec{\mathbf{u}}$ vektor nem a nullvektor.
- Az egyenes egyenlete:
$$\frac{X - x_0}{u_1} = \frac{Y - y_0}{u_2} = \frac{Z - z_0}{u_3}.$$
- A $P(x_1, y_1, z_1)$ és a $Q(x_2, y_2, z_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete:
$$\frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{Z - z_1}{z_2 - z_1}.$$
- A sík egyenlete:
$$aX + bY + cZ + d = 0,$$
ahol a, b, c, d együtthatók és X, Y, Z ismeretlenek. Az $\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c)$ vektor a sík normálvektora és $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.
- A $P(x_0, y_0, z_0)$ pont távolsága a $aX + bY + cZ + d = 0$ síktól:
$$\left| \frac{ax_0 + by_0cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$
- A síkok különböző megadásai:
  - A $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ irányra merőleges és a $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő sík egyenlete:
  $$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$
  - Az $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ ($\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ lineárisan függetlenek) irányokkal párhuzamos és a $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő sík egyenlete:
  $$w_1(X - x_0) + w_2(Y - y_0) + w_3(Z - z_0) = 0,$$
  ahol $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3) = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$.
  - A $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ és $R(x_3, y_3, z_3)$ nem kollineáris pontokon átmenő sík egyenlete:
  $$w_1(X - x_1) + w_2(Y - y_1) + w_3(Z - z_1) = 0,$$
  ahol $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \times (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_1 - z_3)$.

- Az $\dfrac{X-x_0}{u_1}=\dfrac{Y-y_0}{u_2}=\dfrac{Z-z_0}{u_3}$ egyenes és az $aX+bY+cZ+d=0$ síkok párhuzamosak, pontosan akkor ha az (u_1,u_2,u_3) és (a,b,c) vektorok merőleges egymásra, azaz $au_1+bu_2+cu_3=0$. Ha a fenti egyenes és sík nem párhuzamosak, akkor metszik egymást és a metszéspontjuk:

$$\begin{cases} X_0=u_1\lambda_0+x_0 \\ Y_0=u_2\lambda_0+y_0 \\ Z_0=u_3\lambda_0+z_0 \end{cases},$$

  ahol
$$\lambda_0=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{au_1+bu_2+cu_3}.$$

- Két egyenes párhuzamos pontosan akkor, ha az irányvektoraik párhuzamosak, azaz az irányvektorok lineárisan függőek. Két egyenes merőleges egymásra pontosan akkor, ha az irányvektoraik merőlegesek egymásra, azaz az irányvektoraik skalárszorzata nulla. Két sík párhuzamos pontosan akkor, ha a normálvektoraik párhuzamosak, illetve két sík merőleges egymásra pontosan akkor, ha a normálvektoraik merőlegesek egymásra.

- Tegyük fel, hogy az $aX+bY+cZ+d=0$ és a $a'X+b'Y+c'Z+d'=0$ síkok nem párhuzamosak és legyen (x_0,y_0,z_0) a

$$\begin{cases} aX+bY+cZ+d=0 \\ a'X+b'Y+c'Z+d'=0 \end{cases}$$

  egyenletrendszernek egy megoldása. Ha $\vec{\mathbf{u}}=(u_1,u_2,u_3)$-mal jelöljük az $(a,b,c)\times(a',b',c')$ vektori szorzatot, akkor a fenti síkok metszete az

$$\frac{X-x_0}{u_1}=\frac{Y-y_0}{u_2}=\frac{Z-z_0}{u_3}$$

  egyenes.

Gyakorlatok

1. Írjuk fel a P ponton átmenő $\vec{\mathbf{v}}$ irányvektorú egyenes egyenletrendszerét:

a) $P(-1,3,7)$, $\quad\vec{\mathbf{v}}(-4,2,6)$,

b) $P(0,-1,2)$, $\quad\vec{\mathbf{v}}(1,7,9)$,

c) $P(9,8,-3)$, $\quad\vec{\mathbf{v}}(6,0,2)$,

d) $P(-11,9,1)$, $\quad\vec{\mathbf{v}}(12,8,-4)$.

2. Egy egyenes egyenletrendszeréről hogy lehet azonnal leolvasni, hogy az egyenes párhuzamos az xOz koordinátasíkkal?

3. Döntsük el, rajta van-e a $P(-3,2,5)$ pont az alábbi egyeneseken:

a) $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-20}{4}=z-9,5;$

b) $x = 15 - 2t, y = -43 + 5t, z = -22 + 3t$.

4. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely

a) átmegy a $P_0(3, -1, 5)$ ponton és párhuzamos az Oy tengellyel;

b) átmegy az origón és a koordinátatengelyek pozitív irányával egyenlő szögeket zár be;

c) írjuk fel az Ox tengely egyenletét.

5. Írjuk fel a következő pontpárok által meghatározott egyenes egyenletrendszerét:
a) $P(-2, 5, 6)$, $Q(7, -1, 3)$;
b) $P(5, 1, 2)$, $Q(-5, 1, 3)$;
c) $P(0, 0, 0)$, $Q(9, 11, -1)$;
d) $P(1, 1, -2)$, $Q(3, -1, 0)$.

6. Adjuk meg a $P(-6, 4, -5)$ és $Q(10, -5, 2)$ pontokon átmenő egyenes metszéspontjait a koordinátasíkokkal.

7. Tükrözzük az $x = 4 - 2t$, $y = 5 + 3t$, $z = 3 - t$ egyenest a $C(2, -1, 7)$ pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?

8. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenesek párhuzamosak egy síkkal:

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}, \qquad \frac{x}{5} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{7}, \qquad \frac{x+8}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z+9}{-3}.$$

9. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenespárok kölcsönös helyzetét (párhuzamosság, metszés, merőlegesség, kitérés):

a) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ és $x = 5 + 6t,\ y = -4t,\ z = 7 + 2t$;

b) $x = 2t,\ y = 13 + 5t,\ z = -13 - 7t$ és $x = -2 + 2t,\ y = 2 - t,\ z = 4 + 3t$;

c) $x = t,\ y = -1 + 2t,\ z = 1 + t$ és $x = 5 + 2t,\ y = -t,\ z = 3 - 2t$;

d) $x - 3 = \dfrac{y-8}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ és $x - 4 = \dfrac{y-9}{2} = \dfrac{z-9}{5}$.

10. Írjuk fel az $\dfrac{x+9}{-5} = \dfrac{y+2}{3} = z - 4$ és $x - 3 = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z+4}{-3}$ metsző egyenesek szögfelezőinek az egyenletredndszerét.

11. Adjuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy a $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$ és $\dfrac{x-3}{m} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$ egyenesek merőlegesek legyenek egymásra.

12. Mutassuk meg a metszéspont kiszámítása nélkül, hogy az $x = 1 + t,\ y = 4 - t,\ z = 3 + 2t$ és $x = -1 + 2t,\ y = 7 - 3t,\ z = 4 - t$ egyenesek metszők.

13. Írjuk fel az $M(4, -4, 16)$ pontból az $x = 2 + t,\ y = 4 + 4t,\ z = 4 + t$ egyenletrendszerű egyenesre állított merőleges egyenletrendszerét.

14. Az $A(1, -2, 4)$, $B(5, 1, -7)$, $C(3, 1, -3)$ egy háromszög csúcsai. Írjuk fel a C-n átmenő magasságvonal egyenletrendszerét.

15. Számítsuk ki a $P(2,4,-6)$ pontnak az $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+1}{9} = \dfrac{z}{2}$ egyenestől mért távolságát.

16. Határozzuk meg a $P(-1,2,3)$ pont $\dfrac{x+1}{3} = y = z$ egyenesre vonatkozó tükörképét.

17. Írjuk fel a koordinátasíkok egyenleteit.

18. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az xOy koordinátasíkra és azt az $2x+3y-1=0$ egyenletű egyenesben metszi.

19. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely átmegy a $P(-4,5,2)$ ponton és tartalmazza az Oz tengelyt.

20. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $Q(2,3,-5)$ ponton és párhuzamos az $\vec{\mathbf{a}}(3,1,-1)$ és $\vec{\mathbf{b}}(1,-2,1)$ vektorokkal.

21. Írjuk fel az $A(2,-1,3)$, $B(3,1,2)$ pontokon átmenő és az $\vec{\mathbf{u}}(3,1,-4)$ vektorral párhuzamos sík egyenletét.

22. Írjuk fel az $A(8,5,1)$, $B(-4,34,-5)$, $C(0,1,-1)$ pontok síkjának az egyenletét.

23. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az Ox, Oy, Oz tengelyeket rendre a 9, -1, -7 pontokban metszi. Írjuk fel azon egyenesek egyenletét, amelyekben metszi az így kapott sík és a koordináta síkokat.

24. Válasszuk ki az alábbi síkpárok közül a párhuzamosokat:

a) $2x-3y+5z-7=0$ és $2x-3y+5z+3=0$;

b) $4x+2y-4z+5=0$ és $2x+y+2z-1=0$;

c) $x-3z+2=0$ és $2x-6y-7=0$.

25. Írjuk fel az $M(2,-8,0)$ ponton átmenő a $\sqrt{2}x+y-\sqrt{7}-33=0$ síkkal párhuzamos sík egyenletét.

26. Írjuk fel a $P(7,3,1)$ ponton átmenő, az $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+11}{7}$ egyenesre merőleges sík egyenletét.

27. Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenleteit, amelyekben a $2x-17y+13z-4=0$ sík metszi a koordináta síkokat.

28. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az $x-2y+5z-3=0$ síkra, párhuzamos az $\dfrac{x-3}{2} = y = \dfrac{z+1}{4}$ egyenessel és átmegy a $P(-3,2,1)$ ponton.

29. Írjuk fel annak a síkban az egyenletét, amely átmegy az origón és merőleges a $2x-y+3z-1=0$ és $x+2y+z=0$ síkokra. Határozzuk meg azokat az egyeneseket, amelyekben metszi a kapott sík az előbbi síkokat.

30. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-7}{3}$ és $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{-1}$ egyenesekkel párhuzamos és egyenlő távol van tőlük. Számítsuk ki a két egyenes távolságát.

31. Tükrözzük az $2x-8y+3z-6=0$ és $2x-8y+3z+14=0$ síkokat egymásra és írjuk fel a tükörképek egyenletét.

32. Az m paraméter milyen értékére lesz párhuzamos az $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z+3}{-2}$ egyenes az $x-3y+6z+7=0$ síkkal?

33. Bizonyítsuk be, hogy az $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$ és $x-3y+2z-11=0$ síkoknak egy közös pontja van. Számítsuk ki ennek a pontnak a koordinátáit.

34. Adjunk meg egy olyan egyenest, amely az $x-8y+4z-9=0$ síktól 4 egységnyire, a $4x+20y-5z-42=0$ síktól pedig 3 egységnyire van.