

Függvények határértéke

Gyakorlatok

1. Számoljuk ki a következő függvényhatárértékeket.

$$\begin{array}{lll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 100x}{x}; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{1-x^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{2x}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{2x^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4}; \\
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 4x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \\
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x-3}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x + 7^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}; & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right); & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2-1} \right); \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x^2}}; & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x^2)^{\frac{1}{x^2}}; & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}; \\
 \lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x-3}}; & \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}; & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin x)}{x}; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1};
 \end{array}$$

2. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$ függvénynek létezik-e határértéke a $+\infty$ -ben?

3. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3-1}{3x^3+x+2}$ függvény esetén számold ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ -et.

4. Számold ki a következő határértékeket:

$$\begin{array}{ll}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}); & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}); \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}; \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x - \cos x}{x}; &
 \end{array}$$

5. Igazoljuk, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, úgynevezett Dirichlet függvénynek egyetlen pontban sincs határértéke. Tehát sehol sem folytonos.

6. Folytonos-e az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\{x\}$ függvény, ahol $\{x\}$ az x törtrészét jelöli.

7. Vizsgáljuk a következő függvények folytonosságát:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} ;$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} ;$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases} .$$

8. Folytonos-e az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvény?