Implicit függvények deriválása

Tekintsük az $f(x,y)=0$ implicit függvényt. Ki akarjuk számítani az y x szerinti deriváltját (jelölés: y' vagy $\frac{dy}{dx}$), illetve az x y szerinti deriváltját (jelölés: x' vagy $\frac{dx}{dy}$). Ezt a következő összefüggések teszik lehetővé:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)},$$

$$x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}.$$

1. Számítsuk ki az $x^3+y^3-3xy=0$ implicit függvény esetén az x'-t, illetve y'-t.

Először azonosítjuk a fenti jelölés szerinti $f(x,y)$ függvényt. Ebben az esetben $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. Ezután kiszámoljuk $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2-3y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2-3x.$$

Tehát $x' = -\dfrac{3y^2-3x}{3x^2-3y} = -\dfrac{y^2-x}{x^2-y}$ és $y' = -\dfrac{3x^2-3y}{3y^2-3x} = -\dfrac{x^2-y}{y^2-x}$.

2. Számítsuk ki az $y^x = x^y$ implicit függvény esetén az x'-t és y'-t.

Ebben az esetben $f(x,y) = y^x - x^y = e^{x\ln y} - e^{y\ln x}$ és

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x\ln y}\ln y - e^{y\ln x}\frac{y}{x} = y^x\ln y - x^y\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x\ln y}\frac{x}{y} - e^{y\ln x}\ln x = y^x\frac{x}{y} - x^y\ln x.$$

Behelyettesítve ezeket a fenti képletbe kapjuk, hogy

$$x' = -\frac{y^x\frac{x}{y} - x^y\ln x}{y^x\ln y - x^y\frac{y}{x}},$$

$$x' = -\frac{y^x\ln y - x^y\frac{y}{x}}{y^x\frac{x}{y} - x^y\ln x}.$$

Paraméteresen adott függvények deriválása

Tekintsük az $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ paraméteresen adott görbét. Az x t szerinti deriváltját $\dot{x}$-tal jelöljük és

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t.$$

Az y t szerinti deriváltját $\dot{y}$-tal jelöljük és a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t.$$

Az x-nek az y szerinti deriváltját a következőképpen számíthatjuk ki:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}.$$

Továbbá az y-nak az x szerinti deriválját az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$x' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$$

A következő példánkban legyen $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ egy paraméteresen adott görbét. Ekkor

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t,$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \sin t.$$

Ezekből kiszámíthatjuk x', illetve y' a következőképpen:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1 - \cos t}{\sin t},$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Paraméteresen adott függvények deriválása

3. Határozzuk meg az $y = x^3 - 12x$ függvény helyi szélsőértékeit.

Az $y' = 0$ egyenletből megkapjuk azokat a pontokat, ahol az $y = x^3 - 12x$ függvény felveheti a szélsőértékeit.

$$y' = 3x^2 - 12,$$

A $3x^2 - 12 = 0$ egyenlet megoldásai $x = -2$ és $x = 2$. Ahhoz, hogy megtudjuk mondani, hogy ezekben a pontokban a függvénynek helyi minimuma vagy maximuma van-e szükségünk van a másodrendű deriváltra is: $y" = 6x$. Az $y"(-2) = -12 < 0$ ezért az $x = -2$ pontban az y függvénynek helyi maximuma van. Mivel $y"(2) = 12 > 0$ ezért az $x = 2$ pontban az y függvénynek helyi minimuma van.

4. Határozzuk meg az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény helyi szélsőértékeit.

Az előbbi feladat megoldása során használt gondolatmenetet követjük.
Kiszámítjuk: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.
Az $1 - \frac{1}{x^2} = 0$ egyenletből megkapjuk a lehetséges szélsőérték pontokat: $x = -1$ és $x = 1$.
Kiszámítjuk: $f"(x) = \dfrac{2}{x^3}$.
Mivel $f"(-1) = -2 < 0$ ezért az $x = -1$ pontban az f függvénynek helyi minimuma van. Továbbá az $f"(1) = 2 > 0$ ezért az $x = 1$ pontban a függvénynek helyi minimuma van.

Szöveges szélsőérték feladatok

5. Határozzuk meg az a sugarú körbe írt legnagyobb területű téglalap területét.

Feltehetjük, hogy a téglalap csúcsai a körön vannak. Jelöljük a téglalap két oldalának hosszát x-szel, illetve y-nal. Ekkor a téglalap területe $T = x \cdot y$. Vegyük észre, hogy $0 \leq x \leq 2a$ és ugyanez fennáll y-ra is.

Az x és y között van egy összefüggés. Ha a téglalapban behúzzuk az egyik átlót akkor egy derékszögű háromszöget kapunk, melynek a csúcsai a körön vannak. Ezért a háromszög átfogója a kör átmérője egyben. A Pitagorász tétel alapján írhatjuk, hogy

$$x^2 + y^2 = (2a)^2. \tag{1}$$

Ebből kifejezhetjük az y-t:

$$y = \sqrt{(2a)^2 - x^2}. \tag{2}$$

Tulajdonképpen az (1) összefüggésből kifejezhetük volna y-t a következőképpen is: $y = -\sqrt{(2a)^2 - x^2}$, de mivel y egy hosszat jelöl ezért nem lehet negatív. Így a feladatunk szempontjából ez utóbbi kifejezése az y-nak nem értelmes, helyes.

Tehát $T = x \cdot y = x\sqrt{4a^2 - x^2}$, a terület már csak x függvénye. A $T(x) = x\sqrt{4a^2 - x^2}$ függvénynek fel meghatározzuk a maximumát a $[0, 2a]$ intervallumon.

$$T'(x) = \sqrt{4a^2 - x^2} + x\frac{-x}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{4a^2 - 2x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.$$

A $T'(x) = 0$ egyenletb[l kapjuk, hogy $x = \pm\sqrt{2}a$. Mivel x a téglalap egy oldalának hosszát jelöli ezért pozitív mennyiség, azaz $x = \sqrt{2}a$ az értelmes megoldás számunkra.

A $T(x)$ függvény a $[0, 2a]$ intervallum végpontjaiban is felveheti a maximumát ezért a $T(0)$, $T(\sqrt{2}a)$ és $T(2a)$ mennyiségeket össze kell hasonlítsuk, hogy melyik a legnagyobb közülük. A legnagyobb fogja megadni a maximális területet. Mivel $T(0) = T(2a) = 0$ és $T(\sqrt{2}a) = 2a^2$ ezért a maximális terület $2a^2$-tel egyenlő. Megjegyezzük, hogy a maximális területű téglalap tulajdonképpen egy négyzet.

Függvényvizsgálat

Tekintsük az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomfüggvényt. Vizsgáljuk meg a következő kérdéseket.

- Hol metszi az f függvény az x, illetve az y tengelyt?
- Hol veszi fel az f függvény a helyi szélsőértékeit, illetve milyen intervallumokon növekvő vagy csökkenő?
- Milyen intervallumon konvex vagy konkáv a függvény?

Vegyük sorra a kérdéseket. Probálgatással megkapjuk, hogy $x = 1$ gyöke az $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomnak. Ha az kiemelünk $x - 1$-et az $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$-ból akkor kapjuk, hogy $f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$. Tehát az f függvény másik két zérus helye az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet gyökei: $x = 2$ és $x = 3$. Tehát az f függvény az $x = 1$, $X = 2$, $X = 3$ pontokban fogja metszi az x tengelyt. Az f az y tengelyt az $y = f(0) = -6$ pontban metszi.

Az f függvény helyi szélsőértékeit az $f'(x) = 0$ egyenlet gyökei között kell keressük.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

Az $3x^2 - 12x + 11 = 0$ egyenlet gyökei: $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ és $x = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$. Ahhoz, hogy megmondjuk, hogy ezek helyi mimnimumok vagy maximumok ki számítjuk $f"(x)$-et:

$$f"(x) = 6x - 12.$$

Mivel $f"(\frac{6-sqrt3}{3}) = -2\sqrt{3} < 0$ ezért $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ pont az f függvénynek helyi maximuma. Továbbá mivel $f"(\frac{6+\sqrt{3}}{3}) = 2\sqrt{3} > 0$ ezért az $x = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$ pont helyi minimum pont.

Mivel az f' a $(-\infty, \frac{6-\sqrt{3}}{3})$ és a $(\frac{6+\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ intervallumon pozitív ezért ezeken az intervallumokon az f növekvő. Az $(\frac{6-\sqrt{3}}{3}, \frac{6+\sqrt{3}}{3})$ intervallumon az f' negatív ezért ezen az intervallumon az f csökkenő.

Megvizsgáljuk, hogy hol lesz pozitív, illetve negatív az $f"$-t. Könnyen kapjuk, hogy csak az $x = 2$ pontban lesz nulla az $f"(x)$ és a $(-\infty, 2)$ intervallumon negatív az $f"(x)$, illetve az $(2, +\infty)$ intervallumon pozitív az $f"(x)$. Tehát az f az $(-\infty, 2)$ intervallumon konkáv és a $(2, +\infty)$ intervallumon konvex az f.