Függvénysorozatok és sorok

1. Határozza meg a következő függvénysorozatok értelmezési tartományát, konvergencia tartományát és határfüggvényét:

$a).\ f_n(x) = \dfrac{x^{n+2}+1}{x^n}$ $\quad b).\ f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $\quad c).\ f_n(x) = e^{-nx}$

$d).\ f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$ $\quad e).\ f_(x) = (\ln x)^n$ $\quad f).\ f_n(x) = n \cdot \sin \dfrac{x}{n}$

2. Határozza meg a következő függvénysorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét:

$a).\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^n;$ $\quad b).\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n};$ $\quad c).\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{tg}^n x$

$d).\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{e^{-x}}{n^2-1};$ $\quad e).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)};$

3. Határozza meg a következő függvénysorok konvergenciatartományát és döntse el, hogy a tartomány mely pontjaiban abszolút konvergens a függvénysor:

$a).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^4+x^2};$ $\quad b).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}};$ $\quad c).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^x;$

$d).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{e^{nx}};$ $\quad e).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)}{n+\sin x};$ $\quad f).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n \sin \dfrac{x}{3^n}$

4. Számítsa ki a következő hatványsorok konvergencia sugarát. Vizsgálja meg, hogy a konvergenciaintervallum végpontjaiban a sor egyenletesen konvergens-e:

$a).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n n^2};$ $\quad b).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^2} x^n;$ $\quad c).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n x^n;$

$d).\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n(n-1)};$ $\quad e).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(4x)^n}{\sqrt{(4n-1)2^n}};$ $\quad f).\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}$

$g).\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{3^n \sqrt{(n-1)^3}}$

5. Írja fel a következő függvények n-dik (fokú) Taylor-polinomját az x_0 pontban:

$a).\ e^x, \quad x_0 = 2, \quad n = 4;$ $\quad b).\ \sin x \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}, \quad n = 5;$

$c).\ \ln x, \quad x_0 = 2, \quad n = 3;$ $\quad d).\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}, \quad x_0 = 2, \quad n = 3$

6. Írja fel a következő függvények Maclaurin-sorát és állapítsa meg, hogy ez a hatványsor mely intervallumban állítja elő a függvényt:

$a).\ a^x (a > 0);$ $\quad b).\ e^{-x^2};$ $\quad c).\ e^{x^2+1};$

$d).\ \mathrm{ch} x;$ $\quad e).\ \mathrm{sh}\dfrac{x}{2};$ $\quad f).\ \ln(x^2+1);$

$g).\ \dfrac{1}{1-2x^2}$ $\quad h).\ \cos^2 x$ $\quad i).\ \mathrm{arctg} x$

$j).\ \arcsin x$ $\quad k).\ \ln(1-x^2)$ $\quad l).\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

Forrás: Babcsányi I., Csank L., Nagy A., Szép G., Zibolen E. *Matematika feladatgyűjtemény III.* Műegyetemi Kiadó, 2002.