Geometria Gyakorlat Pontverseny – 1. feladatsor

Szabó Szilárd

2008. február 18.

1. Feladat Legyen d és d' két kitérő egyenes a térben, $A, B \in d$ és $A', B' \in d'$ tetszőleges különböző pontokból álló páros.

a) Minden valós t-re legyen $P(t)$ (illetve $P'(t)$) az a pontja d-nek (ill. d'-nek), amelyre $\overrightarrow{AP(t)} = t\overrightarrow{AB}$ (ill. $\overrightarrow{A'P'(t)} = t\overrightarrow{A'B'}$). Határozzuk meg a $P(t)P'(t)$ szakaszok középpontjának mértani helyét, ha t végigfut $\mathbf{R}$-en! (10p)

b) Legyenek P és P' tetszőleges pontjai d-nek illetve d'-nek. Határozzuk meg a PP' szakaszok középpontjának mértani helyét, ha P végigfut d-n és P' végigfut d'-n! (10p)

2. Feladat Legyen $ABCD$ egy tetraéder a térben, I és J az AC és BD élek felezőpontjai, $0 < t < 1$ tetszőleges, és $M(t), N(t), P(t), Q(t)$ azok a pontok, amelyekre

$$\overrightarrow{AM(t)} = t\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN(t)} = t\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CP(t)} = t\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CQ(t)} = t\overrightarrow{CB}.$$

a) Mutassuk meg, hogy $M(t)N(t)P(t)Q(t)$ egy parallelogrammát alkot! (5p)

b) Legyen $O(t)$ az $M(t)N(t)P(t)Q(t)$ parallelogramma középpontja. Lássuk be, hogy $\overrightarrow{IO(t)} = t\overrightarrow{IJ}$! (10p)

c) Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéderben azon három szakasz, amelyek végpontjai az egymással páronként szembenálló élek felezőpontjai, egymást középpontjukban metszik! (10p)

d) Jelöljük O-val az előző pont közös metszéspontját. Lássuk be, hogy

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}! \qquad (10p)$$

e) Határozzuk meg az O pont koordinátáit az $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ koordinátarendszerben! (10p)

f) Lássuk be, hogy $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ egy koordinátarendszer, és határozzuk meg ebben a rendszerben a D pont koordinátáit! (10p)

3. Feladat Legyen d az az egyenes a térben, melynek Descartes-féle egyenlete

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0.$$

a) Mutassuk meg, hogy egy P sík akkor és csak akkor tartalmazza d-t, ha Descartes-féle egyenlete

$$t(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) + s(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0$$

alakban írható valamely $(t, s) \neq (0, 0)$ számpárosra! (10p)

b) Legyen d Descartes-féle egyenlete

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z + 6 &= 0 \\ x + 4y + 3z + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Adjuk meg annak a P síknak az egyenletét, amely tartalmazza d-t és párhuzamos az

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{-z-3}{3}$$

egyenletű d' egyenessel! (10p)

c) Határozzuk meg d' távolságát P-től! (5p)