

**A GEOMETRIA TANSZÉK PONTVERSENYE**  
**MATEMATIKUS**  
**HALLGATÓK SZÁMÁRA**

2.forduló  
(2008. 03. 17)

1. Az ABC háromszög belsejében felvett P ponton át húzzunk párhuzamosokat a háromszög oldalával. Így kapjuk a  $t_1, t_2, t_3$  területű kisebb háromszögeket. Hogyan kell a P pontot megválasztani, hogy ezeknek a háromszögeknek a területösszege az eredeti háromszög területének a harmada legyen? (10p)

2. Adott az O középpontú és r sugarú K kör, valamint az e egyenes, amely K-t a P és Q pontban metszi. Legyen k olyan kör, amely egyrészt kívülről érinti K-t, mégpedig a nem nagyobb PQ ív valamely belső pontjában, másrészt érinti az e egyenest. Bizonyítsuk be, hogy a nem nagyobb PQ ív F felezőpontjából a k körhöz vont érintőszakasz hossza független k-tól. (15p)

3. Legyenek A és B a k kör belsejében az O körközeppontra szimmetrikus pontok. Vegyünk fel a k körön kívül egy tetszőleges P pontot, amelynek A-tól és B-től mért távolságaira  $PA \leq PB$ . A PA átmérőjű t körnek a k-körrel képzett metszéspontjait jelölje M és N. Igazoljuk, hogy  $\angle MPA = \angle BPN$ . (15p)

4. Az egységsugarú körvonalon elhelyezünk  $n$  pontot. Bizonyítsuk be, hogy ezek páronkénti távolságának négyzetösszege nem nagyobb  $n^2$ -nél. (15p)

5. Adott páratlan számú pont egy síkban úgy, hogy közülük nincs három egy egyenesen levő pont. A pontokat tetszőleges módon úgy kötjük össze, hogy minden ponton legalább egy egyenes menjen át. Bizonyítsuk be, hogy létezik legalább egy olyan pont, amelyen páros számú egyenes halad át. (15p)

6 .a. Legyenek  $A_1B_1C_1$  és  $A_2B_2C_2$  ellentétes körüljárású háromszögek úgy, hogy  $A_1B_1 = A_2B_2$ ,  $B_1C_1 = B_2C_2$ ,  $C_1A_1 = C_2A_2$ . Legyen továbbá  $A, B, C$  rendre  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  felezőpontja. Igazoljuk, hogy az  $A, B, C$  pontok egy egyenesen vannak. (5p)

b. Fogalmazza meg és oldja meg az analóg feladatot 3 dimenzióban. (10p)

c. Fogalmazza meg és oldja meg az analóg feladatot  $n$  dimenzióban ( $n \geq 4$ ). (15p)

**Beadási határidő: 2008. 04. 14 (legkésőbb a geometria gyakorlaton).**

**Jó munkát kívánunk!**

**Minden egyes feladat minden egyes megoldását külön lapon kérjük.  
Lényegesen különböző (1) új megoldás 5 pontot ér.**