A3 beadandó feladatok I.

Beadási határidő: 2008. március 19.

1*. Jelölje $\mathbb{R}(n)$ az $n \times n$-es valós mátrixok terét, k legyen pozitív egész! Mi az $F : \mathbb{R}(n) \to \mathbb{R}$, $F(B) := \operatorname{tr}(B^k)$ leképezés deriváltja (i) ha B szimmetrikus, (ii) ha B egy tetszőleges eleme $\mathbb{R}(n)$-nek?

2. Legyenek $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egyszer differenciálható vektor-vektor-mezők. Határozza meg az (i) $\operatorname{div}((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w})$ és az (ii) $\operatorname{rot}\left(((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}) + ((\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}) + ((\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u})\right)$ mezőket!

3. (i) Számítsa ki az $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{v}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$vektor-vektor-mező integrálját az alábbi $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ görbék mentén:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos(t/2)) \cos t \\ (2 + \cos(t/2)) \sin t \\ \sin(t/2) \end{pmatrix};$$

(ii) Számítsa ki az alábbi $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ görbe ívhosszát:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Miket írnak le ezek a görbék?

4. Forgassuk meg az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 5 &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

egyenletű kört az y tengely körül! Írja föl az így előálló tórusz egyenletét $p(\phi, \psi)$ alakban ill. $F(x, y, z) = 0$ formában! Hányadfokú polinom lesz F?

5. Számítsa ki az alábbi felületek felszíneit! Miféle felületek ezek?

$$\text{(i)} \quad p(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\psi \\ (R + r\cos\phi)\sin\psi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}, \quad (\phi, \psi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi], \quad R > r > 0;$$

$$\text{(ii)} \quad p(\phi, u) = \begin{pmatrix} \cos\phi - u\sin\phi \\ \sin\phi + u\cos\phi \\ \phi + u \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad u \in [0, 1].$$

6. Tekintsük azt az S irányítható felületet, amit az $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$ egyenletű kúpból vágnak ki a $z = 0$ és a $z = 1$ egyenletű síkok. Jelölje továbbá $\mathbf{r}$ az $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pontba mutató $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ hosszú vektort. Integrálja a $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\cos(2\pi r)\mathbf{r})$ vektormezőt az S felületen!

7. Számítsa ki az $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = r^{-3}\mathbf{r}$ vektor-vektor-mező integrálját az R sugarú, origó középpontú gömbfelszínre (i) közvetlen számolással (ii) a Gauss-tétel alkalmazásával. Mi az oka annak, hogy a két eredmény nem egyezik?

8. (i) Mutassa meg, hogy az $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-tengely}\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z + \log\sqrt{x^2 + y^2}$ függvény harmonikus; (ii) konstruáljon egy pozitív harmonikus függvényt $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$-n, mely a végtelenben nullához tart!