- **1. Házi feladat (az 1. zh anyagából)**
  Matematika A2, terméktervező szak

1) Konvergensek-e a következő numerikus sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$$

2) Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Jelöljön ki olyan intervallumokat, ahol a konvergencia egyenletes!

a. $f_n(x)=\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ b. $f_n(x)=\operatorname{arctg}(nx)$ c. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$ d. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

3) Határozza eg a következő hatványsorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét! (Ötlet: utóbbihoz deriválni vagy integrálni kell...)

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ b. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

d. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{a^{n+1}}$ ahol $a\neq 0$ konst.

4) Írja fel a következő függvények $x_0=0$ körüli Taylor-sorát, és határozza meg a konvergenciatartományt is!

a. $f(x)=e^{-x^2}$

b. $g(x)=\sin(x+2)$ (ötlet : trigonometrikus azonossággal kezdeni)

c. $h(x)=\dfrac{x}{2-x}$

d. $j(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ (ötlet : Cauchy - szorzat !)

5) Számolja ki a következő határozott integrálokat az integrandus függvény megfelelő fokú Taylor - polinomjának segítségével a megadott hiba mellett !

a. $\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx$ és $h=10^{-3}$

b. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ és $h=10^{-2}$

Segítség :
Ha az $f(x)$ Taylor sora Leibnitz típusú,
akkor a hiba az alábbi módon becsülhető :

$$\left|f(x)-T_n(x)\right|\leq\frac{\left|f^{(n+1)}(x_0)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$$

6) Írja fel a megadott függvény Fourier-sorát!

a. f(x)=x ha $-\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2}$, és f(x+k$\pi$)=f(x), k$\in\mathbb{Z}$

b. $g(x)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{ha } -\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}x+2 & \text{ha } \frac{\pi}{2}<x\leq\pi \end{cases}$ és g(x+2kπ)=g(x), k$\in\mathbb{Z}$

7) Mutassuk meg, hogy

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. Ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, akkor $AB \neq BA$ és $(AB)^2 \neq A^2 B^2$

8) Ha $[a_{ij}]_{5\times6}=[b_{ij}]_{5\times4}\,[c_{ij}]_{4\times6}$, akkor $a_{24}=$?

Ugyanezt számolja ki speciálisan arra az esetre is, amikor $[b_{ij}]_{5\times4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ és

$[c_{ij}]_{4\times6}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

9) Számítsa ki a determináns értékét a megadott módszerrel!

a. $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ definícióval (első sor szerinti kifejtés)

b. $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & -9 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tetszőleges sor vagy oszlop szerint kifejtve

c. $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ sor - vagy oszlopcserével

10) Számítsa ki a mátrix rangját a megadott módszerrel!

a. A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, illetve C=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ definícióval

d. D=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ elemi átalakítások segítségével

11) λ mely értékeire lesz a mátrix rangja 1, 2, 3, illetve 4?

M=$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$