Beadandó házifeladatok

1) Oldja meg a következő egyenletrendszert a megadott módszerrel!
a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \quad \text{(mátrix inverzének módszere).} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \quad \text{(Cramer szabály).} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7, \\ x_1 - x_3 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \quad \text{(Gauss módszer).} \end{aligned}$$

2/a) Határozza meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi homogén lineáris egyenletrendszernek legyen nemtriviális megoldása:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 &= 0, \\ ax_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

b) Állapítsa meg, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszernek a és b milyen értékére nincs megoldása/ egy megoldása van/ végtelen sok megoldása van:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 6, \\ -3x_1 + 5x_2 + ax_3 + bx_4 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= b - 3. \end{aligned}$$

3/a) Határozza meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Határozza meg a értékét úgy, hogy az alábbi C mátrixnak -1 sajátértéke legyen. Adjuk meg erre az esetre az összes sajátértéket és a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorokat.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4) Írjuk fel az L lineáris transzformáció mátrixát $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisában: $L(\underline{x}) = \underline{v} \times \underline{x}$, ahol $\underline{v} = [a, b, c]^T$.

5) Hozza kanonikus alakra a következő másodrendű görbét:

$$25x^2 - 36xy + 40y^2 - 4x + 32y + 4 = 0.$$

6) Állapítsa meg, hogy léteznek-e a következő határértékek, és ha igen, határozza meg őket.

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x-y}{x+y}, \qquad \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

7/a) Írja fel az

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a \sin \frac{t}{2} \quad (a \neq 0)$$

egyenletrendszerrel megadott görbe $t = \frac{\pi}{2}$ pontjához tartozó érintőjének egy paraméteres egyenletrendszerét. Mekkora szöget zár be az érintő a z tengellyel?

b) Számítsa ki az alábbi görbe ívhosszát a megadott paraméterintervallumban.

$$\underline{r}(t) = e^t \cos t\underline{i} + e^t \sin t\underline{j} + e^t\underline{k}, \quad 0 \le t \le 2.$$

c) Határozza meg az alábbi görbe $t_0 = 1$ pontjához tartozó kísérő triédert:

$$\underline{r}(t) = (t^2 - 1)\underline{i} + (t + 2)\underline{j} + (t^3 - t)\underline{k}.$$

d) Számítsa ki a megadott görbe görbületét és torzióját a $t_0 = \frac{\pi}{2}$ pontban:

$$\underline{r}(t) = \cos^2 t\underline{i} + \cos t \sin t\underline{j} + \sin t\underline{k}.$$

e) Számítsa ki a megadott görbe simulókörének középpontját és sugarát a $t_0 = 1$ pontban:

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{t}\underline{i} + t^2\underline{j} + (2 + t^2)\underline{k}.$$

8/a) Számítsa ki az $f(x, y) = x \ln(x+y)$ függvény gradiensét a $P_0(-2, 3)$ pontban.

b) Állapítsa meg, hogy az $f(x, y) = xy + x - 2y + 5$ függvény gradiense mely pontokban lesz egységvektor.

c) Számítsa ki az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény $\alpha = 60^\circ$ iránymenti deriváltját a $P(\sqrt{3}, -1)$ pontban.
d) Keresse meg az $f(x,y) = 4x^3y^2$ függvény minimális és maximális iránymenti deriváltját a $P(-1,1)$ pontban.
e) Mutassuk meg, hogy az $f(x,y) = xe^x \cos y$ függvény kielégíti a

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0$$

egyenletet.
9/a) Állapítsa meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3, \quad g(x,y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

b) Határozza meg az alábbi függvények feltételes szélsőértékeit a megadott feltétel mellett:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy + 1, \text{ az } y = 2x + 1 \text{ egyenes } (0,1), (1,3) \text{ közti szakaszán,} \\ g(x,y) &= xy, x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$