A3 beadandó feladatok I.

Beadási határidő: 2009. március 18. (szerda)

1*. Jelölje $\mathbb{R}(n)$ az $n \times n$-es valós mátrixok terét. Mi az (i) $\mathrm{tr} : \mathbb{R}(n) \to \mathbb{R}$, $B \mapsto \mathrm{tr}B$ és az (ii) $\det : \mathbb{R}(n) \to \mathbb{R}$, $B \mapsto \det B$ leképezések deriváltja?

2. Egy kétszer differenciálható $f : R^3 \to \mathbb{R}$ függvényre $\triangle f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ a skalár Laplace-operátor. Értelmezze az $\triangle'$ vektor Laplace-operátort és bizonyítsa be, hogy egy $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezőre $\triangle' \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$.

3. (i) Számítsa ki az $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{v}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ vektormező integrálját az alábbi $\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3$ görbék mentén:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos t \\ \mathrm{e}^t \sin t \\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} (5 + \cos(t/3)) \cos t \\ (5 + \cos(t/3)) \sin t \\ \sin(t/3) \end{pmatrix}.$$

Miket írnak le ezek a görbék?

(ii) Számítsa ki az

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$$

görbe $P(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ és $Q(6, 12, 16)$ pontjait összekötő darabjának ívhosszát!

4. Forgassuk meg az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 5 &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

egyenletű kört az y tengely körül! Írja föl az így előálló tórusz egyenletét $p(\phi, \psi)$ alakban ill. $F(x,y,z) = 0$ formában! Hányadfokú polinom lesz F?

5. Számítsa ki az alábbi felületek felszíneit! Miféle felületek ezek?

$$\text{(i)} \quad p(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\psi \\ (R + r\cos\phi)\sin\psi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}, \quad (\phi, \psi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi], \quad R > r > 0;$$

$$\text{(ii)} \quad p(\phi, u) = \begin{pmatrix} \cos\phi - u\sin\phi \\ \sin\phi + u\cos\phi \\ \phi + u \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad u \in [0, 1].$$

6. Tekintsük azt az S irányítható felületet, amit az $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$ egyenletű kúpból vágnak ki a $z = 0$ és a $z = 1$ egyenletű síkok. Jelölje továbbá $\mathbf{r}$ az $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pontba mutató $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ hosszú vektort. Integrálja a $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\cos(2\pi r)\mathbf{r})$ vektormezőt az S felületen!

7. Számítsa ki az $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = r^{-3}\mathbf{r}$ vektormező integrálját az R sugarú, origó középpontú gömbfelszínre (i) közvetlen számolással (ii) a Gauss-tétel alkalmazásával. Mi az oka annak, hogy a két eredmény nem egyezik?

8. (Whitacker–Watson formula) Legyen $f : \mathbb{C} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely mindkét változójában folytonos, a komplex változó szerinti parciális deriváltja létezik és korlátos $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$-n valamint a

$$h(x,y,z) := \int_0^{2\pi} f(z + \mathbf{i}x\cos\phi + \mathbf{i}y\sin\phi\ ,\ \phi)\mathrm{d}\phi$$

integrál létezik. Mutassa meg, hogy az így kapott $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvény harmonikus, azaz kielégíti a $\triangle h = 0$ egyenletet!