

A3 beadandó feladatok II.  
Beadási határidő: 2009. május 6.

1. Keresse meg az alábbi kezdőérték-feladat megoldásának harmadrendű szukcesszív approximációját :

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(-1) = 0.$$

2. Oldja meg az alábbi differenciál-egyenletet, ill. kezdőérték-feladatot!

$$(i) e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x})y' \cos y = 0; \quad (ii) (a^2 + y^2)dx + 2x\sqrt{ax - x^2} dy = 0, \quad y(a) = 0.$$

3. Newton törvénye szerint egy test lehülési sebessége arányos a test és környezete közti hőmérséklet-különbséggel. Ha a környezet hőmérséklete  $20^\circ\text{C}$  és a test 20 perc alatt hűlt le  $100^\circ\text{C}$ -ról  $60^\circ\text{C}$ -ra, mikorra csökken a hőmérséklete  $30^\circ\text{C}$ -ra?

4. Lineárisan függetlenek-e az alábbi függvények azon a legbővebb  $D \subseteq \mathbb{R}$  halmazon, ahol mindannyian értelmezve vannak?

$$(i) \cos x, \cos(x+1), \cos(x-2); \quad (ii) 2\pi, \arctan\left(\frac{x}{2\pi}\right), \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{2\pi}\right); \quad (iii) e^{-\frac{ax^2}{2}}, e^{-\frac{ax^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{at^2}{2}} dt.$$

5. Oldja meg az alábbi lineáris differenciál-egyenleteket!

$$(i) y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0; \quad (ii) y^{(IV)} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0.$$

6. Egy 6m hosszú lánc súrlódás nélkül csúszik az asztalon. Ha a csúzás akkor kezdődik, amikor már 1m-nyi lánc lóg lefelé, akkor mennyi idő múlva esik le a lánc? (Feltesszük, hogy az asztal legalább 6m magas lábakon áll.)

7. Számolja ki az alábbi integrálok aszimptotikus kifejtéseinek vezető tagjait ( $\lambda > 0$  valós paraméter)! Ez megadja az integrálok körülbelüli értékeit jó nagy  $\lambda$ -kra.

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{1/2} + 3t^2} dt; \quad (ii) \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda \tan^2 t} dt.$$

8. Oldja meg Laplace-transzformációval az alábbi kezdőérték-feladatot!

$$y' - 3y = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = -1.$$

9. Közvetlenül a Ljapunov-stabilitás definíciója segítségével vizsgálja meg, hogy az alábbi feladatok megoldásai stabilak-e ill. aszimptotikusan stabilak-e?

$$(i) y' = -y + x^2, \quad y(1) = 1; \quad (ii) y' = 2 + x, \quad y(0) = 1.$$

10. Vizsgálja meg, hogy az alábbi rendszer stacionárius pontjai milyen típusúak!

$$\begin{cases} x' = -2x + \frac{5}{7}y \\ y' = 7x - 3y. \end{cases}$$

11. Az  $\alpha \in \mathbb{R}$  paraméter mely értékeire lesz a  $(0,0)$  stacionárius pont stabil az alábbi rendszerben?

$$\begin{cases} x' = -3x + \alpha y \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$