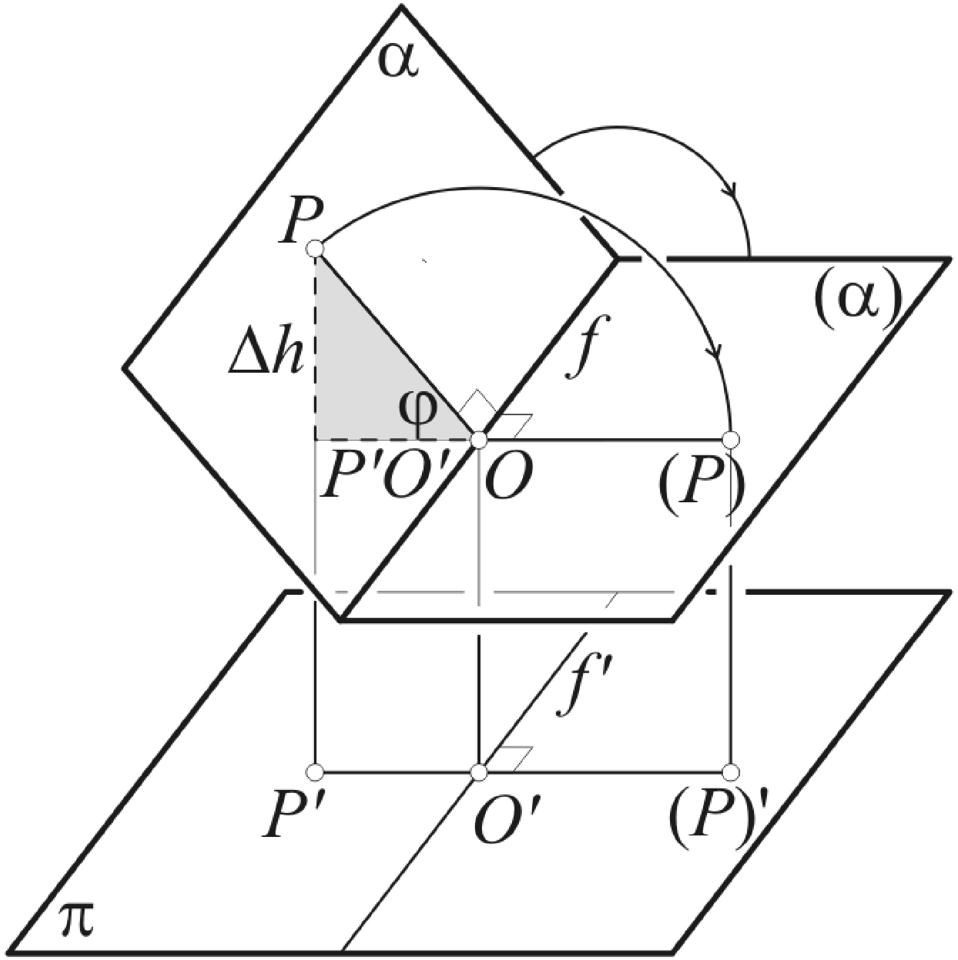
Méretes alapszerkesztések II.

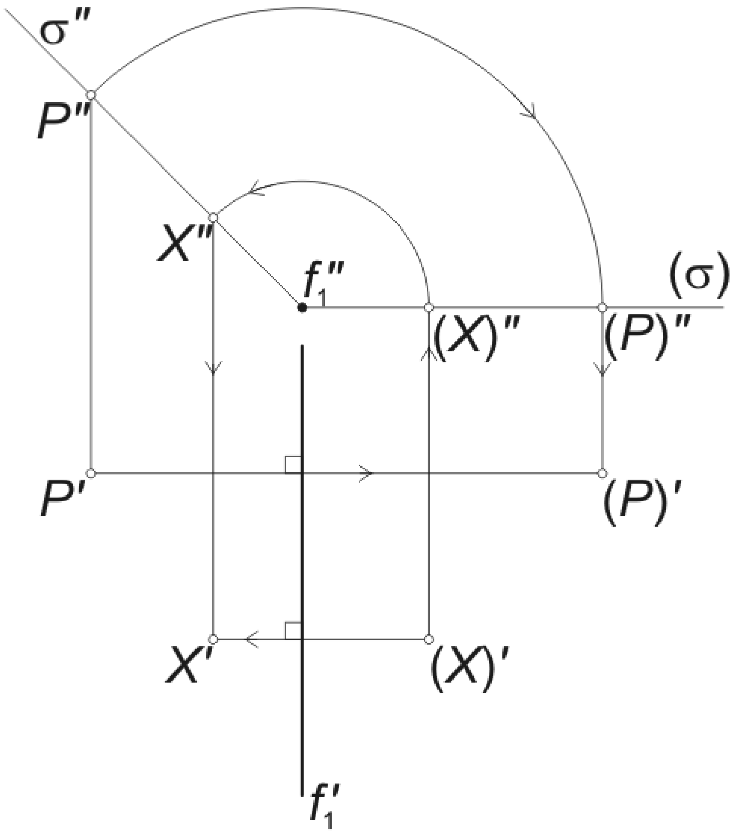
3. Sík forgatása képsíkkal párhuzamos helyzetbe és visszaforgatás

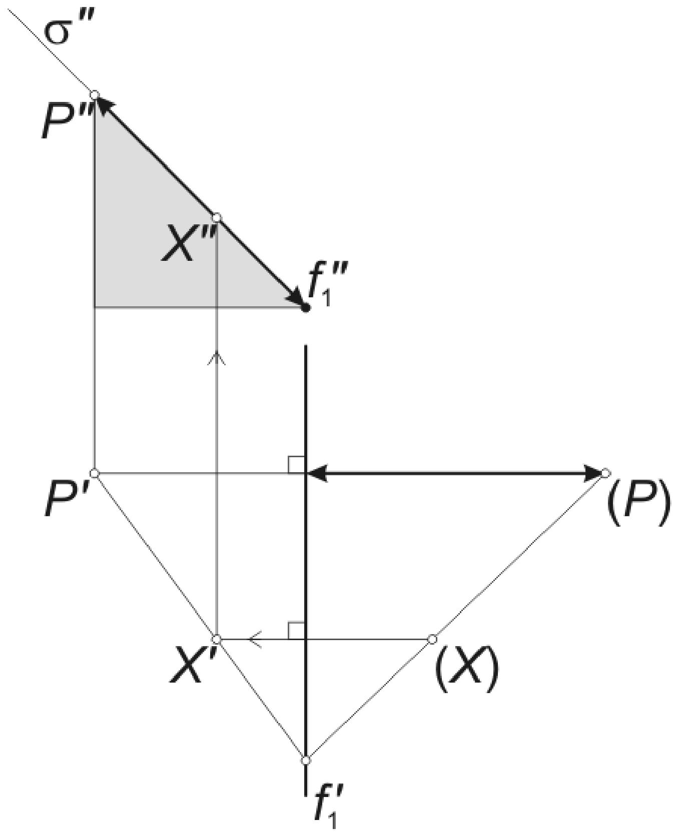


- Egy α sík leforgatása a π képsíkkal párhuzamos helyzetbe egy fővonala (pl. f) körül történhet.
- A sík egy P pontjának pályája olyan kör, amelynek síkja f-re merőleges, és O középpontja illeszkedik f-re.
- A leforgatás különbségi háromszögében a π-vel párhuzamos befogó P' és f' távolsága, a π-re merőleges befogó P és f magasságkülönbsége, az átfogó pedig P és f valódi távolsága.
- A háromszögben a π-vel párhuzamos befogónál lévő φ szög az α és π síkok szöge.

- Az α sík pontjainak az f körüli leforgatáshoz tartozó különbségi háromszögei hasonlók.
- $P'(P)' \perp f'$ (pont képét és leforgatottjának képét a tengely vetületére merőleges egyenes köti össze); továbbá, $(P)'O' = PO$ a különbségi háromszög átfogója.

3.a. Vetítősík leforgatása





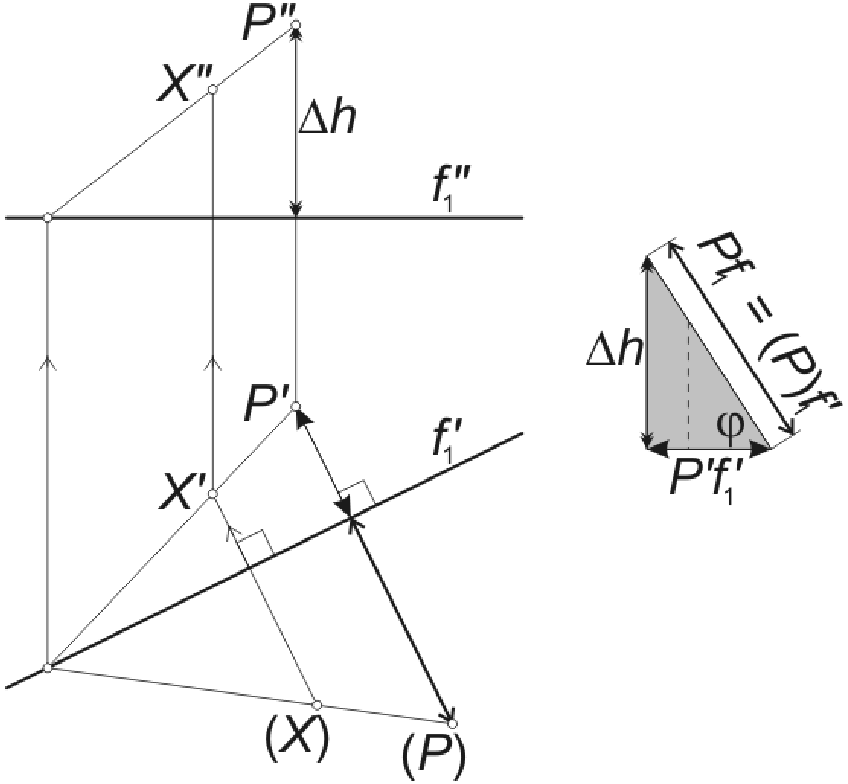
A σ II. vetítősíkot forgatjuk le f_1 I. fővonala (egyben II: vetítőegyenes) körül.

1. Leforgatjuk a sík P pontját. A forgatás köríve II. fősíkra illeszkedik. Ezt a II. képen megrajzolhatjuk, kijelölve $(P)''$-t. Mivel $P'(P)'$ e körív I. képe, így ez merőleges f_1'-re.

Ha $(X)'$ a leforgatott síkon végzett valamely szerkesztés eredménye, keressük X vetületeit. $(X)''$ kijelölése után a visszaforgatás körívével adódik X''. Ekkor X rendezőjének ismeretében kapjuk X'-t kihasználva, hogy $X'(X)'$ merőleges f_1'-re.

2. P leforgatásának közvetlenebb módja, ha kihasználjuk $P'(P)'$ és f_1' merőlegességét, valamint azt, hogy $(P)'$ és f_1' távolsága megegyezik P'' és f_1'' távolságával. $(X)'$ visszaforgatásakor pedig figyelembe vehetjük, hogy a $(P)'(X)'$ egyenes f_1'-vel közös pontja fix.

3.b. Általános sík leforgatása

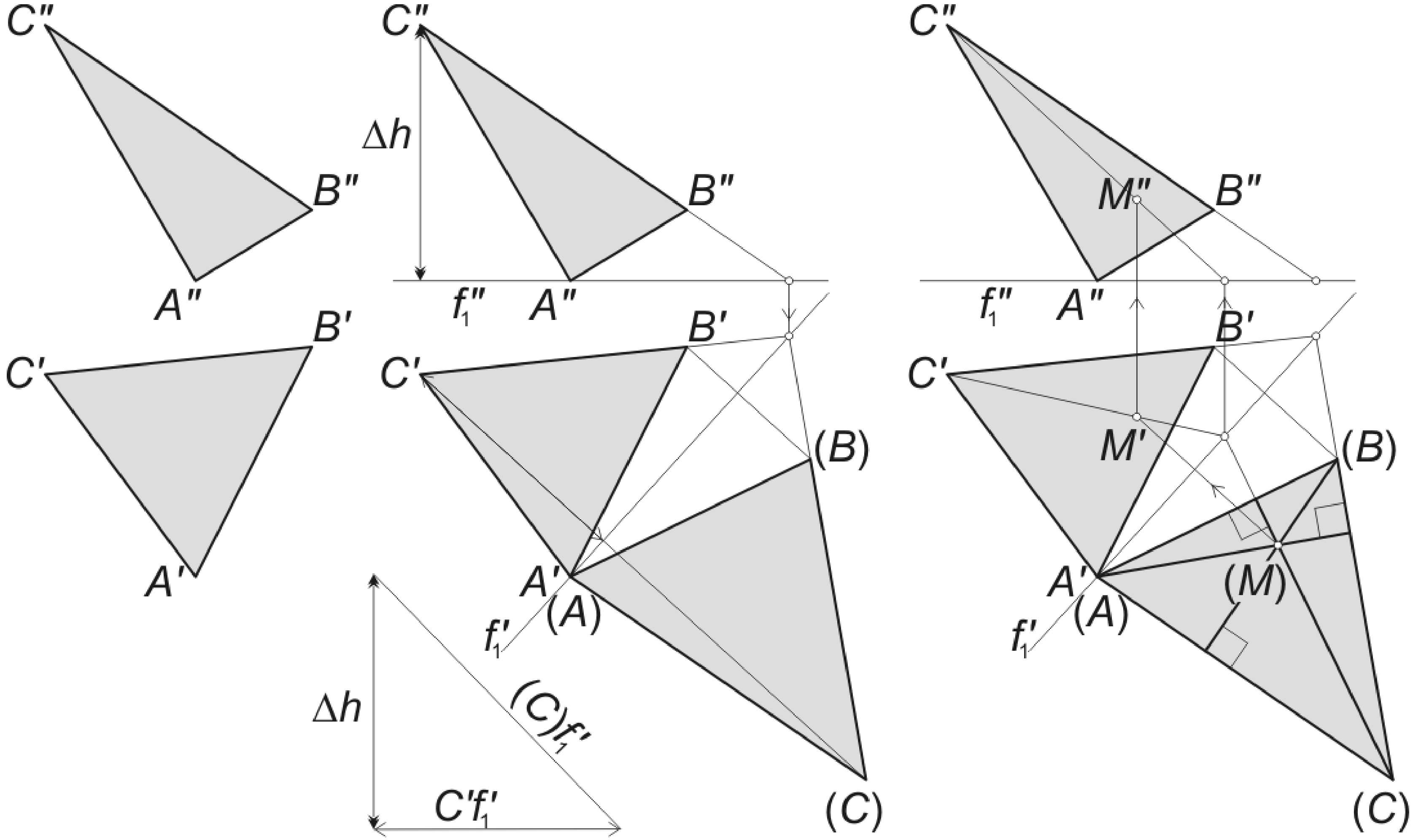


Az $\alpha = [P, f_1]$ (általános) síkot forgatjuk le f_1 I. fővonala körül.

1. A különbségi háromszög megszerkesztésével előállítjuk P és f_1 távolságát. A vízszintes befogó hossza P' és f_1' távolsága, a függőleges befogó pedig P és f_1 magasságkülönbsége. A keresett távolság az átfogó hossza. Ez lesz (P) és f_1' távolsága, amit az f_1'-re merőleges egyenesre (a leforgatási körív képére) kell felmérni.

2. A leforgatott síkon végzett valamely szerkesztés eredményeként adódó (X) pont vetületeit keressük. A $(P)(X)$ egyenes f_1 forgástengellyel közös pontja a forgatás során helyben marad. Ezt P-vel összekötve a PX egyenest kapjuk (mindkét képen). Ezen már X kijelölhető (előbb X', majd X''). Szükség eseten az X leforgatásához tartozó különbségi háromszög is használható, amely P-éhez hasonló.

3.c. Példa síkbeli szerkesztésre

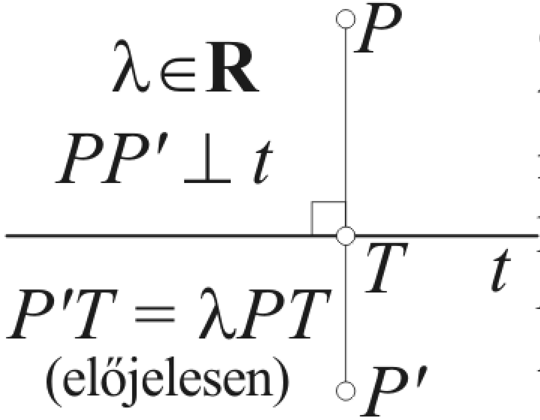


1. Szerkesszük meg az *ABC* háromszög *M* magasságpontjának vetületeit.

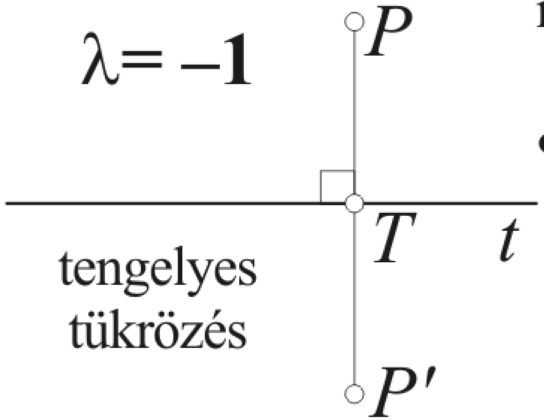
2. Fölvesszük a háromszög síkjának f_1 fővonalát *A*-n keresztül. és a háromszög síkját (a háromszöggel együtt) leforgatjuk körülötte.

3. A leforgatott háromszögben megrajzolhajuk a magasságvonalakat, amelyeknek metszéspontjaként kapjuk az (*M*) magasságpont. Ezt például a (*C*)(*M*) magasságvonal egyenesének segítsgével visszaforgatjuk, előállítva a keresett *M'* és *M''* vetületeket.

A merőleges tengelyes affinitás



- Adott a λ valós szám és a sík t egyenese. A sík egy tetszőleges P pontjához hozzárendeljük P'-t az alábbi módon: Jelölje T a P-ből t-re bocsátott merőleges talppontját. Legyen P' a PT egyenesnek az a pontja, amelyre $P'T = \lambda PT$ teljesül (a távolságokat előjelesen értve). A sík így értelmezett önmagára való leképezését a ***t tengelyű λ arárányú merőleges tengelyes affinitásnak*** nevezzük.

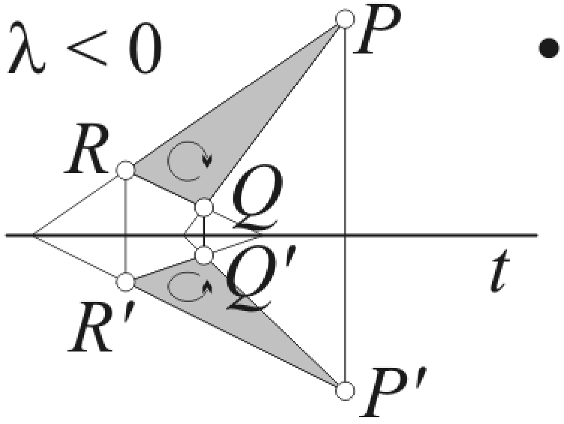


- Speciálisan:

  $\lambda = 1$ esetén ***identikus leképezés;***

  $\lambda = 0$ esetén ***merőleges vetítés t-re*** (a sík képe t);

  $\lambda = -1$ esetén ***t-re vonatkozó tengelyes tükrözés.***

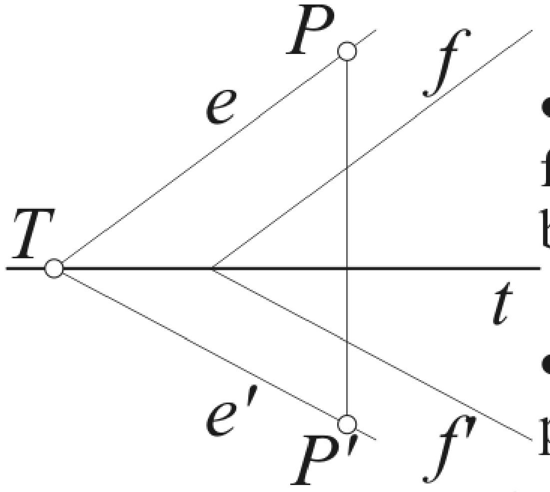


- Továbbá:

  $\lambda > 0$ esetén ***orientáció*** (körüljárás) ***tartó,***
  pont és képe a tengelynek ugyanazon oldalára esik;

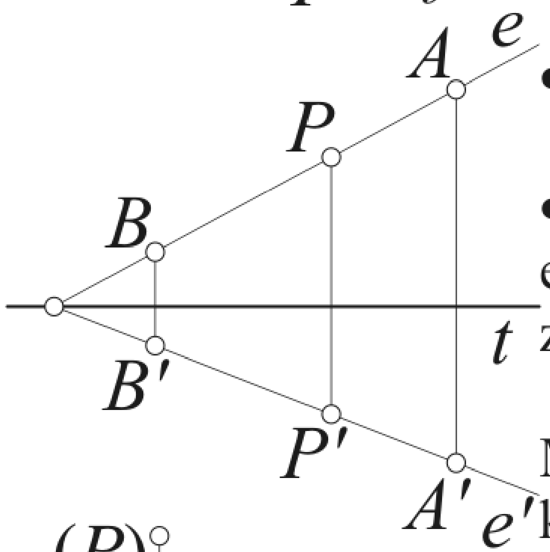
  $\lambda < 0$ esetén ***orientáció váltó,***
  pont és képe t különböző oldalán vannak.

A merőleges tengelyes affinitás tulajdonságai



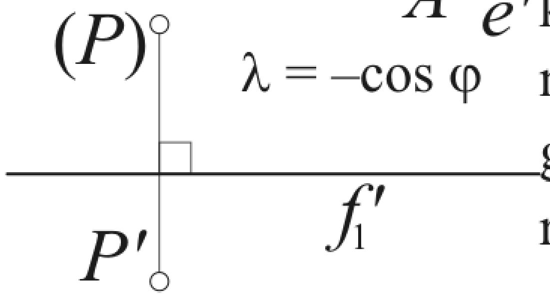
- ***Egyenestartó és illeszkedéstartó.*** A tengely ponjai fixek. Ha egy e egyenes metszi a t tengelyt egy T pontban, akkor e' is metszi t-t, mégpedig éppen T-ben.

- ***Párhuzamosság-tartó.*** Speciálisan, ha egy egyenes párhuzamos t-vel, akkor képe is párhuzamos vele.



- ***Osztóviszonytartó.***

- ***Nem aránytartó és nem szögtató.*** Kivéve a $\lambda = \pm 1$ esetet, amikor is egybevágóság (identitás vagy tükrözés), tehát távolság- és szögtartó.



Megjegyzés: Sík leforgatásakor a leforgatott kép és az I. kép kapcsolata is merőleges tengelyes affinitás, amelynek tengelye f_1', aránya pedig $\lambda = \pm\cos\varphi$, ahol φ a leforgatott sík és a π_1 képsík hajlásszöge (a különbségi háromszög π_1-gyel párhuzamos befogóján lévő szög):
$P'f_1' = \lambda (P) f_1$.