A3 — Minta ZH
Differenciál-egyenletek

1. feladat: Oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát!

$$y'' - 9y' + 14y = 0 \qquad y(0) = 4 \;\; y'(0) = -2$$

Megoldás: Az egyenlethez tartozó karakterisztikus polinom $p(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 14$, és a karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 7$. Ez alapján az alapmegoldások:

$$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = e^{7x}$$

Az általános megoldás pedig ezek lineáris kombinációja:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x}$$

A két paraméter a kezdeti feltételek segítségével határozható meg:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 4 \qquad y'(0) = 2c_1 + 7c_2 = -2$$

Következmény:

$$c_1 = 6 \qquad c_2 = -2$$

amiből a megoldás:

$$y(x) = 6e^{2x} - 2e^{7x}$$

2. feladat: Adja meg az alábbi differenciál-egyenlet általános megoldását!

$$-\frac{2xy \cot\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)}\mathrm{d}x + \frac{1}{\sin\left(x^2\right)}\mathrm{d}y = 0$$

Megoldás: A differenciál-egyenlet $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ alakú, ahol:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2x \cot\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)}$$

tehát létezik $f(x,y)$ differenciálható függvény, melyre:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Ekkor az általános megoldás alakja:

$$f(x,y) = \text{konst.}$$

Ilyen alkalmas $f(x,y)$ az alábbi:

$$f(x,y) = \frac{y}{\sin(x^2)}$$

Tehát az általános megoldásra:

$$\frac{y}{\sin(x^2)} = C \;\; \Rightarrow \;\; y = C \cdot \sin\left(x^2\right)$$

3. feladat: Oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát!

$$(x^2-1)y'' + xy' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$$

Megoldás: Ez a differenciál-egyenlet megoldható az $x_0 = 0$, nem szinguláris pont körüli sorfejtéssel (nem szinguláris, mert $x_0^2 - 1 = -1 \neq 0$). A megoldást a következő alakban keressük:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ahol a kezdeti értékek alapján $a_0 = 1$ és $a_1 = -1$! A deriváltak sorfejtése:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Ez alapján a tagok:

$$(x^2-1)y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n =$$

$$= -2a_2 - 6a_3 x + \sum_{n=2} \left(n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}\right) x^n$$

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

Ezek alapján a megfelelő x hatványokhoz tartozó tagok szerint rendezve:

$$0 = (-2a_2 + a_0) + (-6a_3 + a_1 + a_1)x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n\right) x^n =$$

$$= (-2a_2 + a_0) + (-6a_3 + a_1 + a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n^2-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}\right) x^n$$

Ez alapján

$$-2a_2 + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{1}{2}$$

$$-6a_3 + a_1 + a_1 = 0 \;\Rightarrow\; a_3 = -\frac{1}{3}$$

$$(n^2-1)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)}{n^2-1}a_n = \frac{n+2}{n-1}a_n (n \geq 2)$$

Ez alapján rekurzívan minden együttható számolható.

4. feladat: Adja meg a következő integrál aszimptotikus alakját, a λ szerinti második el nem tűnő tagig!

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{t}+t} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t$$

Megoldás: Az integrandus a következő alakra hozható:

$$t^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t^2} e^{-\lambda t}$$

Ebből az alakból következik, hogy a Watson-lemma használható, $\alpha = -\frac{1}{2}$ és $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ megfeleltetéssel, mivel f valós analitikus a nullában! f első két el nem tűnő deriváltja, a nulladik és a második:

$$f(0) = 1 \qquad f''(0) = 2$$

Ez alapján a Watson-lemmában található aszimptotikus sorfejtés $n = 0$-hoz és $n = 2$-höz tartozó tagja lesznek nem eltűnőek:

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t) e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{f(0)}{0!}\frac{\Gamma(\alpha+0+1)}{\lambda^{\alpha+0+1}} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{\Gamma(\alpha+2+1)}{\lambda^{\alpha+2+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3+1}}\right)$$

Behelyettesítve a megfelelő értékeket, és kihasználva, hogy $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ és $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$:

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{t}+t} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t \sim \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{4}\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right)$$

(Megjegyzés: a hibatag élesíthető, mivel a negyedik derivált lesz újra nem eltűnő, tehát a hiba $O\left(\frac{1}{\lambda^{-\frac{1}{2}+4+1}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^{-\frac{9}{2}}}\right)$!)

5. feladat: Oldja meg az alábbi kezdeti-érték problémát Laplace-transzformáció segítségével!

$$y'' - 5y' + 6y = 3x + 2$$

$$y(0) = 0 \;\; y'(0) = 1$$

Megoldás: Laplace-transzformáljuk mindkét oldalt és legyen y transzformáltja Y! A bal oldal:

$$\left(z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) - 5\left(zY(z) - y(0)\right) + 6Y(z) =$$

$$= (z^2 - 5z + 6)Y(z) - 1$$

A jobb oldal:

$$\frac{3}{z^2} + \frac{2}{z}$$

Ezután az egyenlet Y-ra rendezve:

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \left(\frac{3}{z^2} + \frac{2}{z} + 1 \right)$$

Az inverz-Laplace-transzformációhoz ezt parciális törtekre kell bontanunk. Ennek eredménye:

$$Y(z) = \frac{5}{4} \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z-3} + \frac{1}{z^2} + \frac{3}{4z}$$

Vissza-transzformálás után a megoldás:

$$y(x) = \frac{5}{4} e^{2x} - 2e^{3x} + \frac{1}{2} x + \frac{3}{4}$$