Matematika A3 minta-zárthelyi — Vektoranalízis

1. feladat: Legyen f skalármező és $\underline{v}$ vektormező $\mathbb{R}^3$-ön! Mutassa meg, hogy

$$\mathrm{div}\Big(f\cdot\underline{v}\Big) = \langle \mathrm{grad}\, f\ ,\ \underline{v}\rangle + f\cdot\mathrm{div}\Big(\underline{v}\Big)$$

Megoldás: Descartes-koordinátákban tetszőleges

$$\underline{u}(x,y,z) = \begin{bmatrix} u_x(x,y,z) \\ u_y(x,y,z) \\ u_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

vektormező esetén a divergencia

$$\mathrm{div}\,\underline{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Legyen most $\underline{u} = f\cdot\underline{v}$, amiből:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\Big(f\cdot\underline{v}\Big) &= \frac{\partial\,(f\cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial\,(f\cdot v_x)}{\partial y} + \frac{\partial\,(f\cdot v_x)}{\partial z} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot v_x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v_y + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot v_z + f\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \\
&= \langle \mathrm{grad}\, f\ ,\ \underline{v}\rangle + f\cdot\mathrm{div}\,\underline{v}
\end{aligned}$$

2. feladat: Legyen

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \\ t \end{bmatrix} \qquad t\in[0,2\pi]$$

Mennyi γ hossza?

Megoldás: A hossz-képlet:

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\|\mathrm{d}t$$

Itt $t_0 = 0$ és $t_1 = 2\pi$. A görbe érintővektora

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ez alapján

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{(2\cos t)^2 + (2\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{4\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + 1} \equiv \sqrt{5}$$

Ebből

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{5}\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{5}$$

3. feladat: Tekintsük a következő felület-paraméterezéseket:

$$p_1(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{u}{u^2+v^2} \\ \frac{v}{u^2+v^2} \\ \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{bmatrix} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$p_2(z,\varphi) = \begin{bmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ z \end{bmatrix} \qquad (z,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi)$$

Bizonyítsa be, hogy p_1 és p_2 ugyanazokat a felületeket paraméterezik! Van-e szinguláris pontja ennek a felületnek? Ha igen, melyik?

Megoldás: Elég megmutatni, hogy minden $p_1(u,v)$ ponthoz létezik pontosan egy (z,φ) hogy $p_1(u,v) = p_2(z,\varphi)$! Legyen most $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tetszőleges, ekkor legyen

$$z = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

és φ az az egyértelműen létező $[0,2\pi)$-beli szám melyre

$$\cos\varphi = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

Ekkor $p_1(u,v) = p_2(z,\varphi)$ teljesül, tehát emely pont előáll $p_1(u,v)$ alakban, az előáll $p_2(z,\varphi)$ alakban is. Visszafele pedig legyen

$$u = \frac{\cos\varphi}{z} \qquad v = \frac{\sin\varphi}{z}$$

Ekkor újra $p_1(u,v) = p_2(z,\varphi)$. A két paraméterezés ugyanazt a felületet adja.

A felület felírható $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ alakban, ha kikötjük, hogy $z > 0$. Egy pont szinguláris, ha

$$\operatorname{grad} F = \underline{0}$$

abban a pontban. Most

$$\operatorname{grad} F = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{bmatrix}$$

Ez a nullvektor pontosan akkor, ha $x = y = z = 0$, de $z = 0$ nem lehet, tehát nincs szinguláris pont (ez egy kúp, aminek a csúcsa lenne szinguláris pont, de azt épp kihagytuk.)

4. feladat Legyen S az
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$
egyenletű forgás-hiperboloidnak a $z = \pm 1$ egyenletű síkok közé eső darabja! Mennyi a
$$\underline{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^4 \end{bmatrix}$$
vektormező integrálja S határára?

Megoldás: Mivel egy felület határára integrálunk, egy mindenhol értelmezett, tetszőlegesen sokszor differenciálható vektormezőt, ezért használható a Stokes-tétel:
$$\oint_{\partial S} \langle \underline{v}\,,\, \mathrm{d}\gamma \rangle = \iint_S \langle \mathrm{rot}\, \underline{v}\,,\, \mathrm{d}S \rangle$$
$\underline{v}$ rotációja:
$$\left(\mathrm{rot}\, \underline{v}\right)_1 = \epsilon_{123} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \epsilon_{132} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial z^4}{\partial y} - \frac{\partial y^3}{\partial z} = 0$$
$$\left(\mathrm{rot}\, \underline{v}\right)_2 = \epsilon_{231} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \epsilon_{213} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial x^2}{\partial z} - \frac{\partial y^4}{\partial x} = 0$$
$$\left(\mathrm{rot}\, \underline{v}\right)_3 = \epsilon_{312} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \epsilon_{321} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial y^3}{\partial x} - \frac{\partial z^4}{\partial y} = 0$$
így a kérdéses integrál
$$\oint_{\partial S} \langle \underline{v}\,,\, \mathrm{d}\gamma \rangle = \iint_S \langle \underline{0}\,,\, \mathrm{d}S \rangle = 0$$

5. feladat: Legyen S egy $R > r$ sugarakkal jellemzett tórusz! Mennyi a
$$\underline{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
vektormező integrálja S-re?

Megoldás: Az S zárt felület, és $\underline{v}$ mindenhol értelmezett, tetszőlegesen sokszor differenciálható vektormező, emiatt használható a Gauss-tétel:
$$\oiint_S \langle \underline{v}\,,\, \mathrm{d}S \rangle = \iiint_{\mathrm{int}\, S = V} \mathrm{div}\, \underline{v}\, \mathrm{d}V$$
ahol $\mathrm{int}\, S = V$ a tórusz belseje. $\underline{v}$ divergenciája:
$$\mathrm{div}\, \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$
Ezt behelyettesítve
$$\oiint_S \langle \underline{v}\,,\, \mathrm{d}S \rangle = \iiint_V 3\mathrm{d}V = 3V_{\text{tórusz}_{R,r}} = 3 \cdot 2\pi^2 R r^2 = 6\pi^2 R r^2$$
ahol $V_{\text{tórusz}_{R,r}} = 2\pi^2 R r^2$ az R és r sugarakkal jellemzett tórusz térfogata.