Schriftliche Prüfung (Muster)

1. Für welchen Wert von p schneiden sich die Geraden

$$a : \frac{x}{3} = y - 1 = \frac{z+2}{p} \quad \text{und} \quad b : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{4}\,?$$

(Wählen Sie je 2 Punkte auf den Geraden, und prüfen Sie, ob diese komplanar sind!)

2. Diskutieren Sie die Kurve

$$y = \ln\sqrt{x^2 - 4}$$

(Definitionsbereich, Wertevorrat, Monotonitätsintervalle, lokale Extremwerte, Konvexität/Konkavität). Schreiben Sie die Gleichung der Tangenten an die Kurve im Punkt $x_0 = \sqrt{5}$ auf.

3. Schreiben Sie das Taylor-Polynom 6-ten Grades und sein Restglied der Funktion

$$f(x) = \cos 2x \quad \text{um} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

auf.

4. Ist das folgende Integral konvergent? Wenn ja, geben Sie seinen Wert an.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{4x^2 - x}$$

5. Lineare Unabhängigkeit der Vektoren und geometrische Deutung in 2 und 3 Dimensionen

6. Die Gleichung der Tangenten. Was behauptet der Mittelwertsatz von Lagrange über die Tangente?

7. Definieren Sie die arccos Funktion (zeichnen Sie auch ein Bild)!

8. Volumen und Oberfläche eines Rotationskörpers.

Lösungen:

1. Das Volumen des Tetraeders mit 4 gewählten Eckpunkten ist Null für p=-36.

2. $|x| > 2$, Nullstellen $x = \pm\sqrt{5}$, $y(x) = y(-x)$, gerade. $\lim_{x\to\infty} y = \infty$, $\lim_{x\to 2+0} y = -\infty$. Wertebereich $(-\infty, +\infty)$, Asymptoten $x = 2$, $x = -2$, $y' = \frac{x}{x^2-4} \neq 0$, keine Extr.stellen, $y'' = \frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2} < 0$, kein Wendepunkt, konkav. Tangente: $y = \sqrt{5}x - 5$. Skizze des Graphen.

3. $f(x) = T_6(\frac{\pi}{2}) + R_6 = -1 + \frac{2^2}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2 - \frac{2^4}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4 + \frac{2^6}{6!}(x-\frac{\pi}{2})^6 + \frac{2^7 \sin 2\xi}{7!}(x-\frac{\pi}{2})^7$, $\xi \in (x, \frac{\pi}{2})$.

4. Stammfunktion $\ln|\frac{4x-1}{x}| + c$, Grenzwert $\lim_{\omega\to\infty}\left(\ln|\frac{4\omega-1}{\omega}| - \ln 3\right) = \ln 4 - \ln 3$.