Matematika A3 házi feladat: VEKTORANALÍZIS

(2011. február 10.)

Görbék, felületek

1) Vizsgálja meg, hogy az alábbi vektor-skalár függvény folytonos-e/folytonossá tehető-e, illetve létezik-e a határértéke a $t_0 = 0$ pontban!

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t \cdot \mathrm{ctg}(3t)}{4} \\ \frac{\mathrm{tg}(t) - \sin(t)}{\sin^2(t)} \\ \frac{\mathrm{tg}(t)}{t} \end{pmatrix}$$

2) Vizsgálja meg, hogy az alábbi vektor-skalár függvény folytonos-e/folytonossá tehető-e, illetve létezik-e a határértéke a $t_0 = 1$ pontban!

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3 - 3t + 2}{t^4 - 4t + 3} \\ \frac{t^4 - 3t + 2}{t^5 - 4t + 3} \\ \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} \end{pmatrix}$$

3) Mutassa meg, hogy az alábbi görbe egy $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ egyenletű felületre illeszkedik! Miféle felület ez?

a) $\underline{r}(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)\underline{i} + \sin^2(t)\underline{j} + \cos(t)\underline{k}$

b) $\underline{r}(t) = a \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2}\underline{i} + b \cdot \sin(t)\cos(t)\underline{j} + c \cdot \cos(t)\underline{k}$ ahol *a, b* és *c* nemnulla konstansok.

4) Írja fel az alábbi görbékhez a megadott pontban húzott érintő egyenes egyenletét!

a) $\underline{r}(t) = 3^t\underline{i} + t \cdot \ln(3)\underline{j} + \sqrt{t^2 + 1}\underline{k}$ és $t_0 = \frac{1}{2}$

b) $\underline{r}(t) = \frac{1}{\cos(t)}\underline{i} + tg(t)\underline{j} + (a \cdot t)\underline{k}$, ahol *a* valós konstans, és $t_0 = \frac{\pi}{3}$

5) Térjen át ívhosszparaméterre! Miféle görbe ez? Milyen felületen halad? Írja fel a felület egy paraméteres vektoregyenletét

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$$

6) Egy anyagi pont helyét az idő (t) függvényében az alábbi vektor-skalár függvény adja meg. Számítsa ki

- a kezdeti sebességet,
- az anyagi pont sebességét (a kezdettől számított) 1 óra múlva (az időt szokás szerint sec-ban mérjük),
- hogy mekkora utat tett meg az anyagi pont a mérés megkezdésétől számított 11 sec alatt (elég jól felírni az integrált),
- hogy mekkora a gyorsulása 11 sec múlva!

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3 + 1}{2} \\ t - 1 \\ 5t^4 - 3t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

7) Egy ágyúgolyó röppályájának pályafüggvénye:

$\underline{r}(t)=(a\cdot t+b)\underline{i}+(g\cdot t^2+c\cdot t+d)\underline{k}$, ahol a kilövés a t=0 sec-ban történik, és $a=5\frac{m}{s}$, $b=100m$, $c=10\frac{m}{s}$, $d=200m$ és $g=-5\frac{m}{s^2}$.

a) Honnan lőtték ki az ágyúgolyót?
b) Mekkora volt a kezdősebesség?
c) Mekkora a gyorsulás?
d) Mennyi idő alatt érkezik a földre?
e) Hol és melyik időpillanatban merőleges a sebességvektor a gyorsulásvektorra?

8) Számítsuk ki az $\underline{r}(t)=(t^2-1)\cdot\underline{i}+2t\cdot\underline{k}$ egyenlettel megadott elhanyagolható vastagságú huzal tömegét a $t\in[1;2]$-on, ha tudjuk, hogy a sűrűsége:

a) $\rho(t)=a$ ahol a pozitív valós konstans
b) $\rho(t)=\frac{4}{3}t$

A b) esetben mondjuk meg, hogy hol (t=?) van a huzal tömegközéppontja!

9) Ellenőrizzük, hogy az alábbi pontok nincsenek egy egyenesen, majd írjuk fel az általuk meghatározott sík vektormentes egyenletét és egy paraméteres egyenletrendszerét!
$P_1(0;0;0)$, $P_2(1;0;0)$, $P_3(0;1;0)$

10) Forgassuk meg a $z=f(x)=\ln(x)$ függvény grafikonját

a) a z tengely körül,
b) az x tengely körül!

Írja fel az így kapott felületek paraméteres vektoregyenleteit!

11) Írja fel az alábbi felületek vektormentes egyenletét! Miféle felületek ezek?

a) $\underline{r}(u,v)=a\cdot\cos(u)\underline{i}+a\cdot\sin(u)\underline{j}+v\cdot\underline{k}$, ahol a rögzített, pozitív valós paraméter, $u\in[0;2\pi]$ és v valós.
b) $\underline{r}(u,v)=a\cdot\cos(u)\cdot\sin(v)\cdot\underline{i}+b\cdot\sin(u)\cdot\sin(v)\cdot\underline{j}+c\cdot\cos(v)\cdot\underline{k}$, ahol *a, b, c* rögzített, pozitív valós paraméter, $u,v\in[0;2\pi]$.

12) Írja fel az alábbi felület egy paraméteres vektoregyenletét! Miféle felület ez?

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, ahol *a, b, c* rögzített, pozitív valós paraméter.

13) Írja fel az érintősík egyenletét az $(u_0,v_0)=(\frac{\pi}{4},\pi)$ helyen! Miféle felület ez?

$\underline{r}(u,v)=(2+\cos(v))\cdot\cos(u)\cdot\underline{i}+(2+\cos(v))\cdot\sin(u)\cdot\underline{j}+\sin(v)\cdot\underline{k}$

14) Számítsa ki a felületdarab felszínét a megadott T tartományon!

a) $\underline{r}(u,v)=(\cos(u)-v\cdot\sin(u))\cdot\underline{i}+(\sin(u)-v\cdot\cos(u))\cdot\underline{j}+(u+v)\cdot\underline{k}$ ahol T: $0\le u\le\pi$ és $0\le v\le 1$,
b) $2z=x^2$ ahol T az x=2y, 2x=y és x=$2\cdot\sqrt{2}$ görbék által határolt véges tartomány.

div, **rot**, **grad**, **∇**, Δ

1) Bizonyítsa be az alábbi azonosságokat! (Mj: $\langle \underline{a},\underline{b}\rangle$ és $\underline{a}\cdot\underline{b}$ egyaránt skaláris szorzatot jelöl.)

a) $div(u\cdot\underline{v})=\langle \underline{v},\underline{grad}(u)\rangle+u\cdot div(\underline{v})$

b) $\underline{rot}(u\cdot\underline{v})=(\underline{v}\times\underline{grad}(u))+u\cdot\underline{rot}(\underline{v})$

c) $div(\underline{v}\times\underline{w})=\langle \underline{w},\underline{rot}(\underline{v})\rangle-\langle \underline{v},\underline{rot}(\underline{w})\rangle$

2) Állapítsuk meg, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező mely halmazon forrásmentes, illetve mely halmazon örvénymentes!

a) $\underline{v}(\underline{r})=(x^2-y^2)\cdot\underline{i}+(y^2-z^2)\cdot\underline{j}+(z^2-x^2)\cdot\underline{k}$

b) $\underline{v}(\underline{r})=(x^2+y^3)\cdot\underline{i}+(12xy-3x)\cdot\underline{j}+(xyz^2)\cdot\underline{k}$

c) $\underline{v}(\underline{r})=\underline{a}(\underline{r}^2)$

Görbementi integrál

1) Számítsa ki a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező görbementi integrálját a megadott $\mathcal{G}$ görbe mentén!

a) $\underline{v}(\underline{r})=(y^2-x^2)\cdot\underline{i}+2yz\cdot\underline{j}+(-x^2)\cdot\underline{k}$ és $\mathcal{G}$ az x=t, y=t^2, z=t^3 $(0\le t\le 1)$ egyenletrendszerű görbe a paraméter növekedésének megfelelő irányítással.

b) $\underline{v}(\underline{r})=(2xy-z)\cdot\underline{i}+(x^2+z)\cdot\underline{j}+(y-x)\cdot\underline{k}$ és $\mathcal{G}$ az $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{16}y^2=1$ z=2 egyenletrendszerű ellipszis az xy koordinátasíkbeli negatív forgásirány szerinti irányítással.

2) Adott a térerősség a következő alakban: $E=(3x+2xz)\cdot\underline{i}+(2y^2+5xz)\cdot\underline{j}+(5xy)\cdot\underline{k}$.

a) Mekkora munkát végez az erőtér, ha egy egységnyi (1kg) tömegű test mozog egy egyenes mentén a P_0(1;2;-1) pontból a P_1(-1;2;0) pontba?

b) Állapítsuk meg, hogy potenciálos-e a vektormező, s ha igen, adjuk meg!

3) Adott a következő erőtér: $E=-2(xy+z)\cdot\underline{i}-x^2\cdot\underline{j}-(2x+5)\cdot\underline{k}$. Mekkora munkát végez az erőtér, miközben egy m=5kg tömegű test az $\underline{r}(t)=(t+2)\underline{i}-3t\,\underline{j}+(t^2+1)\underline{k}$ görbe mentén a P_0(2;0;1) pontból a P_1(1;3;2) pontba mozog?

Felületmenti integrál

1) Számítsuk ki az alábbi feladatokban a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját a megadott $\mathcal{F}$ felületdarab mentén, ha a felület az $\dot{\underline{r}}_u\times\dot{\underline{r}}_v$ vektorral van irányítva!

a) $\underline{v}(\underline{r})=x\cdot\underline{i}+y\cdot\underline{j}+z\cdot\underline{k}$ és $\mathcal{F}$: $\underline{r}(u,v)=3\cdot\cos(v)\cdot\underline{i}+3\cdot\cos(u)\cdot\sin(v)\cdot\underline{j}+\sin(u)\cdot\underline{k},\quad 0\le u\le\pi,\quad 0\le v\le 2\pi.$

b) $\underline{v}(\underline{r})=xy\cdot\underline{i}+(2x+z)\cdot\underline{k}$ és $\mathcal{F}$: $\underline{r}(u,v)=(u+2v)\cdot\underline{i}-v\cdot\underline{j}+(u^2+3v)\cdot\underline{k},\quad 0\le u\le 3,\quad -2\le v\le 0.$

Integrálredukciós tételek

Az alábbi feladatokban, ha lehetséges, valamelyik nevezetes integrálredukciós tétel (Stokes-, Green- vagy Gauss-Osztrogradszkij tétel) alkalmazásával számítsuk ki $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező integrálját a megadott tartományon. (Tehát vizsgáljuk, hogy alkalmazható-e valamelyik tétel, ha igen, akkor alkalmazzuk, ha nem, akkor más módon számítsuk ki az integrált.)

1) $\underline{v}(\underline{r}) = (2xy - z)\cdot \underline{i} + (x^2 + z)\cdot \underline{j} + (y - x)\cdot \underline{k}$, az integrálás útja a $16x^2 + 9y^2 = 144$ egyenletű elliptikus hengernek és a z=2 síknak a metszésvonala a $\underline{k}$ egységvektorból visszanézve pozitív forgásiránnyal.

2) $\underline{v}(\underline{r}) = -x^2 y \cdot \underline{i} + xy^2 \cdot \underline{j}$, az integrálás útja az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletű kör pozitív forgásiránnyal.

3) $\underline{v}(\underline{r}) = \sqrt{x^2 + y^2}\cdot \underline{i} + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}))\cdot \underline{j}$, az integrálás útja az $1 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$ egyenlőtlenségekkel megadott téglalapot határoló, zárt töröttvonal, pozitív körüljárási iránnyal.

4) $\underline{v}(\underline{r}) = x^2 \cdot \underline{i} + y^2 \cdot \underline{j} + z^2 \cdot \underline{k}$, az integrálási tartomány a koordinátasíkok és az $x^2 + y^2 + 2z = 1$ egyenletű felület által meghatározott zárt $\mathcal{F}$ felület, kifelé mutató felületi normálvektorral.

5) $\underline{v}(\underline{r}) = xz \cdot \underline{i} + xy \cdot \underline{j} + yz \cdot \underline{k}$, az integrálási tartomány a $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ egyenletű felület és az xy koordinátasík által meghatározott zárt $\mathcal{F}$ felület, befelé mutató felületi normálvektorral.