

Schriftliche Prüfung (Muster)

1. Die Punkte $A(1, 2, 0)$, $B(3, -6, 5)$, $C(2, 1, 1)$ und $D(5, 0, 4)$ sind gegeben. Projizieren Sie den Punkt D orthogonal auf die Ebene ABC , und bestimmen Sie seinen Abstand von dieser Ebene.

2. Diskutieren Sie die Kurve

$$y = \ln\sqrt{x^2 - 4}$$

(Definitionsbereich, Wertevorrat, Monotonitätsintervalle, lokale Extremwerte, Konvexität/Konkavität). Schreiben Sie die Gleichung der Tangenten an die Kurve im Punkt $x_0 = \sqrt{5}$ auf.

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Bereiches, der von den Kurven $y = x^2/2$, $y = x + 1/2$ und y Achse berandet ist.

4. Ist das folgende Integral konvergent? Wenn ja, geben Sie seinen Wert an.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^2 - x}$$

5. Wie ist das Taylor-Polynom der Funktion $f(x)$ um $x = a$ definiert? Was sagt die Taylorsche Formel aus?

Schreiben Sie das Taylor-Polynom 4-ten Grades und sein Restglied der Funktion

$$f(x) = \cos 2x \quad \text{um} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

auf.

6. Die Gleichung der Tangenten. Was behauptet der Mittelwertsatz von Lagrange über die Tangente?

7. Definieren Sie die arccos Funktion (zeichnen Sie auch ein Bild)!

8. Volumen und Oberfläche eines Rotationskörpers.

Lösungen:

1. Das Volumen des Spates mit den Kanten AB , AC , AD ist 6. Der Flächeninhalt der Basisfläche mit den Kanten AB , AC ist $3\sqrt{6}$. Die Höhe ist der gefragte Abstand $= \frac{2}{\sqrt{6}}$. Die Gleichung der Ebene der Basisfläche ist $-x + y + 2z = 1$. Die orthogonale Gerade durch D ist durch das Gleichungssystem $x = 5 - t$, $y = t$, $z = 4 + 2t$ beschrieben. Der Schnittpunkt gehört zum Parameterwert $t = -1/3$. Die Projektion von D hat die Koordinaten $(16/3, -1/3, 10/3)$.

2. $|x| > 2$, Nullstellen $x = \pm\sqrt{5}$, $y(x) = y(-x)$, gerade. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} y = -\infty$. Wertebereich $(-\infty, +\infty)$, Asymptoten $x = 2$, $x = -2$, $y' = \frac{x}{x^2-4} \neq 0$, keine Extr.stellen, $y'' = \frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2} < 0$, kein Wendepunkt, konkav. Tangente: $y = \sqrt{5}x - 5$. Skizze des Graphen.

3. $\frac{1}{6}(5 + 4\sqrt{2})$

4. Stammfunktion $\ln\left|\frac{4x-1}{x}\right| + c$, Grenzwert $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\ln\left|\frac{4\omega-1}{\omega}\right| - \ln 3\right) = \ln 4 - \ln 3$.

5. $f(x) = T_4\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_4 = -1 + \frac{2^2}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2^4}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{-2^5 \sin 2\xi}{5!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5$, $\xi \in \left(x, \frac{\pi}{2}\right)$.