Hausaufgaben 4.

Numerische Reihen

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent, absolut konvergent oder divergent sind:

1. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}$
(Leibniz-Reihe, bedingt konv.)

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$
(divergent)

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cosn)^n}{n^n+1}$
(absolut konv., Majorant $\sum \frac{1}{n^2}$, $n > 2$)

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)^{2n}$
(absolut konv., $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{4}$)

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
(positive Reihe, $\frac{a_n+1}{a_n} \to \frac{2}{e}$ konv.)

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$
(positive Reihe, $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$ konv.)

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots (3n-1)}$
(absolut konv., $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$)

Funktionenereihen

Ermitteln Sie das Konvergenzintervall der folgenden Funktionenereihen:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n x,$
($x \neq k\pi$, sonst abs.konv.)

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$
(abs. konv. $-\infty < x < \infty$)

3. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx^2}$
(div.)

4. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$
($0 < x$)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n-1)}$
($R = 2$, div. falls $x = 2$, bedingt konv. falls $x = -2$)

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}, \quad a \neq 0$
($R = |a|$, div. falls $x = \pm|a|$)

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$
(absolut konv. falls $|x-1| < 2$, auch für $x = 3$, $x = -1$)

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k4^k}$
($R = 4$)

Geben Sie die Potenzreihendarstellung um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen an:

9. $y = \sin 2x$ $\qquad (\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!},\ -\infty < x < \infty)$

10. $y = \sqrt{e^x}$ $\qquad (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k\, k!},\ -\infty < x < \infty)$

11. $y = \ln(1 + x^2)$ $\qquad (\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{k},\ |x| < 1)$

12. $y = \sqrt[3]{8 + x}$ $\qquad (2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{k} \left(\frac{x}{8}\right)^k,\ |x| < 8)$