Hausaufgaben 8.

Raumintegrale

1. Berechnen Sie das Volumen des 3D Bereiches begrenzt durch

$$x = 0,\ z = 0,\ y^2 = 4 - x,\ z = y + 2$$

$$\left(\int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-y^2} \int_{0}^{y+2} dz\, dx\, dy = 64/3\right)$$

2. Berechnen Sie das Volumen mit dreifachem Integral des Bereiches

$$x^2 = y + z,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 2$$

$$\left(\int_{0}^{2} \int_{0}^{x^2} \int_{0}^{x^2-y} dz\, dy\, dx = 16/5\right)$$

3. Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y, z) = z^2$ über dem Bereich

$$z = 0,\ x^2 + z = 1,\ y^2 + z = 1$$

$$\left(8 \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \int_{0}^{1-x^2} z^2\, dz\, dy\, dx = 1/3\right)$$

4. Berechnen Sie das Volumen im zylindrischen Koordinatensystem. Die begrenzenden Flächen sind

$$y^2 + x^2 = z,\ y = z$$

$$\left(2 \int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{\sin\varphi} \int_{r^2}^{r\sin\varphi} dz\, r\, dr\, d\varphi\ = \pi/32\right)$$

5. Berechnen Sie die Koordinaten des Gewichtspunktes der Halbkugel: $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z > 0$, wenn die Massendichte mit dem Abstand zwischen ihren Punkten und der z Achse proportional ist. (Rechnen Sie mit Kugelkoordinaten!)

$$\left(\ M = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{3} r\ \sin\vartheta r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi\ = 81\pi^2/8,\ S(0, 0, 16\pi/5)\ \right)$$

6. Integrieren Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

über dem Bereich

$$\sqrt{3x^2 + 3y^2} \le z,\ x^2 + y^2 + z^2 \ge 9,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 81$$

$$\left(\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi/6} \int_{3}^{9} \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\ = 6\pi(2 - \sqrt{3})\right)$$