

## Komplexe Funktionen

### Aufgaben (Muster)

Berechnen Sie  $e^i$ ,  $\cos 2i$ ,  $\ln(-2)$ , und zeichnen Sie einige Werte in der komplexen Zahlenebene auf.

Ermitteln Sie die Lösungen der Gleichung  $\sin z = 2$ .

Berechnung des Wertes von  $i^{-i}$  und  $2^{-i}$ . Wie liegen die Werte in der komplexen Zahlenebene?

Ist die Funktion

$$f(z) = iz^2 - 2\bar{z}$$

differenzierbar?

Ist die Funktion  $u(x, y) = e^{2y} \cos 2x$  harmonisch? Wenn ja, dann bestimmen Sie die harmonisch konjugierte Funktion.

Berechnen Sie das Integral von

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z}$$

über dem Kreis, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, der Radius 3 und positiv orientiert ist. Warum ist das Integral ungleich 0?

Berechnen Sie das Integral von  $e^{2z}$  zwischen den Punkten  $z_1 = -2$  und  $z_2 = 2$

a. längs der Strecke,

b. längs des Halbkreises mit dem Mittelpunkt im Ursprung.

Berechnen Sie das Integral

$$\oint_K \frac{1}{z} dz$$

längs des Kreises  $z(t) = r(\cos t + i \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  und der Ellipse  $z(t) = a \cos t + i \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Berechnen Sie das Integral

$$\int_L (z^2 + 2z) dz,$$

wo  $L$  der positiv orientierte Kreis mit Radius  $R$  und mit Mittelpunkt im Ursprung ist.

### Theorie

Lehrstoff

Höhere Mathematik 2. Band Kapitel 10

1.1-1.4, 2.1-2.8, 5.1-5.3, 6.1-6.4

Die komplexe Exponentialfunktion (Definition, Identitäten,, Veranschaulichung durch Abbildungen).

Definitionen der elementaren komplexen Funktionen  $\cos z$ ,  $\sin z$  und die Eulersche Formel.

Definition und Berechnung des komplexen Logarithmus.

Definition der komplexen Potenz  $w^z$  und die Berechnung des Wertes von  $i^{-i}$ .

Definition der Differenzierbarkeit von  $f(z)$  im Punkt  $z_0$ .

Die notwendige und hinreichende Bedingung der Differenzierbarkeit einer komplexen Funktion.

Welche Funktionen heissen analytisch, und wie berechnet man die Ableitung einer analytischen Funktion.

Harmonische Funktion und die zugeordnete harmonisch konjugierte Funktion. Was für Funktionen sind der reelle und imaginäre Teil einer differenzierbaren komplexen Funktion?

Definition und Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals.

Berechnung des komplexen Integrals

$$\int_L f(z) dz, \quad L : z(t), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Das Integral von  $\frac{1}{z}$  über einem positiv orientierten Kreis.

Der Integralsatz von Cauchy.

Die Bedingungen der Unabhängigkeit vom Weg eines komplexen Kurvenintegrals.

Die Integralformel von Cauchy.