Matematika A3 házi feladat
Differenciálegyenletek

Szöveges feladatok

1) Egy kavicsot tartunk egy kút kávájánál, majd elengedjük, és mérjük az időt addig, míg az bele nem csobban a vízbe. Ha 5 sec múlva halljuk a csobbanást, hány méter mély a kút?
2) Egy gépkocsi 72 km/h sebességről egyenletesen lassulva 10 sec alatt áll meg. Mekkora utat tesz meg ezalatt? (Azaz mekkora a fékút?)
3) Egy bányakőzet megvizsgált darabja 100 mg uránt és 14 mg ólmot tartalmaz. Ismert, hogy az urán felezési ideje $4{,}5\cdot 10^9$ év, és hogy 238 g urán teljes elbomlásakor 206 g ólom keletkezik. Állapítsuk meg a kőzet korát, ha feltehető, hogy keletkezése pillanatában nem tartalmazott ólmot.
4) Egy 10 l vizet tartalmazó edénybe literenként 0,3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 l/min sebességgel. Az edénybe belépő folyadék tökéletesen összekeveredik a vízzel, és a keverék ugyanolyan sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?
5) Tekintsük a következő ragadozó-zsákmány modellt! Válaszoljon a kérdésekre, és állításait mindig indokolja!
$$\begin{cases} \dot{X} = 2 - Y \\ \dot{Y} = -1{,}5 + 0{,}5X \end{cases}$$
   a) Melyik egyenlet fejezi ki a zsákmánypopuláció tömegességének időbeli változását, és melyik a ragadozópopulációét?
   b) Rajzolja fel a fázissíkot, ábrázolja benne az izoklínákat és az iránymezőt!
   c) Határozza meg az egyensúlyi helyzeteket!
   d) Mi történik a zsákmánypopulációval, ha a ragadozó nincs jelen?
   e) Mi történik a ragadozópopulációval, ha a zsákmány nincs jelen?

Vegyes feladatok

Az alábbi feladatokban mindig határozza meg a differenciálegyenlet (vagy kezdetiérték-probléma) típusát, majd oldja meg!

1) Ebben a feladatban határozza meg azt a $D \subseteq \Re^{N+1}$ tartományt is, ahol a megoldás létezik ($N = ?$)!
$y' = \dfrac{x-1}{y}$ és $y(3) = 1$
2) Ebben a feladatban határozza meg a nem azonosan konstans megoldást, és jelöljön ki olyan $D \subseteq \Re^{N+1}$ tartományt is, ahol a megoldás létezik ($N = ?$)!
$y' = y \cdot tg(x)$
3) $\sqrt{1-x^2}\cdot y' + xy = 0$
4) $x^3 + y^3 - 3xy^2 y' = 0$
5) $xy' + y = y^2$ és $y(2) = -3$
6) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$
7) $y''(1+\sin(x))^2 + \cos(x) = 0$
8) $2xe^{x^2} + y\cdot sh(x) + (ch(x) - 2ch(2y))\cdot y' = 0$
9) $2\mathrm{x} + \cos(\mathrm{y}) - (\mathrm{x}\cdot\sin(\mathrm{y}))\cdot \mathrm{y}' = 0$ és $y(1) = 0$
10) $y'' + 4y' + 4y = 0$
11) $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$ és $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 4$
12) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ és $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 5$
13) $y'' - y = e^x(2x+3)$ és $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$
14) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

15) Az alábbi differenciálegyenlet-rendszer esetében vázolja fel az iránymezőt és az izoklínákat, határozza meg az egyensúlyi pontokat, és vizsgálja meg az origó (a rendszer) stabilitását!

$$\begin{cases} \dot{X} = 3X - 2Y \\ \dot{Y} = 1{,}5X + Y \end{cases}$$