

Matematika A3 házi feladat: VEKTORANALÍZIS

(2012. február 10.)

Görbék, felületek

- 1) Vizsgálja meg, hogy az alábbi vektor-skalár függvény folytonos-e/folytonossá tehető-e, illetve létezik-e a határértéke a $t_0 = 0$ pontban!

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t \cdot \operatorname{ctg}(3t)}{4} \\ \frac{\operatorname{tg}(t) - \sin(t)}{\sin^2(t)} \\ \frac{\operatorname{tg}(t)}{t} \end{pmatrix}$$

- 2) Vizsgálja meg, hogy az alábbi vektor-skalár függvény folytonos-e/folytonossá tehető-e, illetve létezik-e a határértéke a $t_0 = 1$ pontban!

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t + 2 \\ t^4 - 4t + 3 \\ t^4 - 3t + 2 \\ t^5 - 4t + 3 \\ \sqrt{t} - 1 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

- 3) Mutassa meg, hogy az alábbi görbe egy $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ egyenletű felületre illeszkedik! Miféle felület ez?

a) $\underline{r}(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)\underline{i} + \sin^2(t)\underline{j} + \cos(t)\underline{k}$

b) $\underline{r}(t) = a \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2} \underline{i} + b \cdot \sin(t) \cos(t) \underline{j} + c \cdot \cos(t) \underline{k}$ ahol a , b és c nemnulla konstansok.

- 4) Írja fel az alábbi görbékhez a megadott pontban húzott érintő egyenes egyenletét!

a) $\underline{r}(t) = 3t \underline{i} + t \cdot \ln(3) \underline{j} + \sqrt{t^2 + 1} \underline{k}$ és $t_0 = \frac{1}{2}$

b) $\underline{r}(t) = \frac{1}{\cos(t)} \underline{i} + \operatorname{tg}(t) \underline{j} + (a \cdot t) \underline{k}$, ahol a valós konstans, és $t_0 = \frac{\pi}{3}$

- 5) Térjen át ívhosszparaméterre! Miféle görbe ez? Milyen felületen halad? Írja fel a felület egy paraméteres vektoregyenletét

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$$

- 6) Egy anyagi pont helyét az idő (t) függvényében az alábbi vektor-skalár függvény adja meg. Számítsa ki

- a kezdeti sebességet,
- az anyagi pont sebességét (a kezdettől számított) 1 óra múlva (az időt szokás szerint sec-ban mérjük),
- hogy mekkora utat tett meg az anyagi pont a mérés megkezdésétől számított 11 sec alatt (elég jól felírni az integrált),
- hogy mekkora a gyorsulása 11 sec múlva!

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3 + 1}{2} \\ t - 1 \\ 5t^4 - 3t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

7) Egy ágyúgolyó röppályájának pályafüggvénye:

$$\underline{r}(t) = (a \cdot t + b)\underline{i} + (g \cdot t^2 + c \cdot t + d)\underline{k}, \text{ ahol a kilövés a } t=0 \text{ sec-ban történik, és } a = 5 \frac{m}{s}, b = 100m, c = 10 \frac{m}{s},$$

$$d = 200m \text{ és } g = -5 \frac{m}{s^2}.$$

- Honnan lőtték ki az ágyúgolyót?
 - Mekkora volt a kezdősebesség?
 - Mekkora a gyorsulás?
 - Mennyi idő alatt érkezik a földre?
 - Hol és melyik időpillanatban merőleges a sebességvektor a gyorsulásvektorra?
- 8) Számítsuk ki az $\underline{r}(t) = (t^2 - 1) \cdot \underline{i} + 2t \cdot \underline{k}$ egyenlettel megadott elhanyagolható vastagságú huzal tömegét a $t \in [1;2]$ -on, ha tudjuk, hogy a sűrűsége:

a) $\rho(t) = a$ ahol a pozitív valós konstans

b) $\rho(t) = \frac{4}{3}t$

A b) esetben mondjuk meg, hogy hol ($t=?$) van a huzal tömegközéppontja!

9) Ellenőrizzük, hogy az alábbi pontok nincsenek egy egyenesen, majd írjuk fel az általuk meghatározott sík vektormentes egyenletét és egy paraméteres egyenletrendszerét!

$$P_1(0;0;0), P_2(1;0;0), P_3(0;1;0)$$

10) Forgassuk meg a $z = f(x) = \ln(x)$ függvény grafikonját

a) a z tengely körül,

b) az x tengely körül!

Írja fel az így kapott felületek paraméteres vektoregyenleteit!

11) Írja fel az alábbi felületek vektormentes egyenletét! Miféle felületek ezek?

a) $\underline{r}(u, v) = a \cdot \cos(u)\underline{i} + a \cdot \sin(u)\underline{j} + v \cdot \underline{k}$, ahol a rögzített, pozitív valós paraméter, $u \in [0;2\pi]$ és v valós.

b) $\underline{r}(u, v) = a \cdot \cos(u) \cdot \sin(v) \cdot \underline{i} + b \cdot \sin(u) \cdot \sin(v) \cdot \underline{j} + c \cdot \cos(v) \cdot \underline{k}$, ahol a, b, c rögzített, pozitív valós paraméter, $u, v \in [0;2\pi]$.

12) Írja fel az alábbi felület egy paraméteres vektoregyenletét! Miféle felület ez?

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \text{ ahol } a, b, c \text{ rögzített, pozitív valós paraméter.}$$

13) Írja fel az érintősík egyenletét az $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{4}, \pi)$ helyen! Miféle felület ez?

$$\underline{r}(u, v) = (2 + \cos(v)) \cdot \cos(u) \cdot \underline{i} + (2 + \cos(v)) \cdot \sin(u) \cdot \underline{j} + \sin(v) \cdot \underline{k}$$

14) Számítsa ki a felületdarab felszínét a megadott \mathcal{T} tartományon!

a) $\underline{r}(u, v) = (\cos(u) - v \cdot \sin(u)) \cdot \underline{i} + (\sin(u) - v \cdot \cos(u)) \cdot \underline{j} + (u + v) \cdot \underline{k}$ ahol $\mathcal{T}: 0 \leq u \leq \pi$ és $0 \leq v \leq 1$,

b) $2z = x^2$ ahol \mathcal{T} az $x=2y$, $2x=y$ és $x=2 \cdot \sqrt{2}$ görbék által határolt véges tartomány.

div, rot, grad, ∇ , Δ

1) Bizonyítsa be az alábbi azonosságokat! (Mj: $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ és $\underline{a} \cdot \underline{b}$ egyaránt skaláris szorzatot jelöl.)

a) $\text{div}(\underline{u} \cdot \underline{v}) = \langle \underline{v}, \text{grad}(\underline{u}) \rangle + \underline{u} \cdot \text{div}(\underline{v})$

b) $\text{rot}(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\underline{v} \times \text{grad}(\underline{u})) + \underline{u} \cdot \text{rot}(\underline{v})$

c) $\text{div}(\underline{v} \times \underline{w}) = \langle \underline{w}, \text{rot}(\underline{v}) \rangle - \langle \underline{v}, \text{rot}(\underline{w}) \rangle$

2) Állapítsuk meg, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező mely halmazon forrásmentes, illetve mely halmazon örvénymentes!

a) $\underline{v}(\underline{r}) = (x^2 - y^2) \cdot \underline{i} + (y^2 - z^2) \cdot \underline{j} + (z^2 - x^2) \cdot \underline{k}$

b) $\underline{v}(\underline{r}) = (x^2 + y^3) \cdot \underline{i} + (12xy - 3x) \cdot \underline{j} + (xyz^2) \cdot \underline{k}$

c) $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{a}(\underline{r}^2)$

Görbementi integrál

1) Számítsa ki a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező görbementi integrálját a megadott \mathcal{G} görbe mentén!

a) $\underline{v}(\underline{r}) = (y^2 - x^2) \cdot \underline{i} + 2yz \cdot \underline{j} + (-x^2) \cdot \underline{k}$ és \mathcal{G} az $x=t, y=t^2, z=t^3$ ($0 \leq t \leq 1$) egyenletrendszerű görbe a paraméter növekedésének megfelelő irányítással.

b) $\underline{v}(\underline{r}) = (2xy - z) \cdot \underline{i} + (x^2 + z) \cdot \underline{j} + (y - x) \cdot \underline{k}$ és \mathcal{G} az $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1, z=2$ egyenletrendszerű ellipszis az xy koordinátásíkbeli negatív forgásirány szerinti irányítással.

2) Adott a térerősség a következő alakban: $E = (3x + 2xz) \cdot \underline{i} + (2y^2 + 5xz) \cdot \underline{j} + (5xy) \cdot \underline{k}$.

a) Mekkora munkát végez az erőtér, ha egy egységnyi (1kg) tömegű test mozog egy egyenes mentén a $P_0(1;2;-1)$ pontból a $P_1(-1;2;0)$ pontba?

b) Állapítsuk meg, hogy potenciálos-e a vektormező, s ha igen, adjuk meg!

3) Adott a következő erőtér: $E = -2(xy + z) \cdot \underline{i} - x^2 \cdot \underline{j} - (2x + 5) \cdot \underline{k}$. Mekkora munkát végez az erőtér, miközben egy $m=5\text{kg}$ tömegű test az $\underline{r}(t) = (t+2)\underline{i} - 3t\underline{j} + (t^2+1)\underline{k}$ görbe mentén a $P_0(2;0;1)$ pontból a $P_1(1;3;2)$ pontba mozog?

Felületmenti integrál

1) Számítsuk ki az alábbi feladatokban a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját a megadott \mathcal{F} felületdarab mentén, ha a felület az $\underline{\dot{r}}_u \times \underline{\dot{r}}_v$ vektorral van irányítva!

a) $\underline{v}(\underline{r}) = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$ és $\mathcal{F}: \underline{r}(u, v) = 3 \cdot \cos(v) \cdot \underline{i} + 3 \cdot \cos(u) \cdot \sin(v) \cdot \underline{j} + \sin(u) \cdot \underline{k}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$

b) $\underline{v}(\underline{r}) = xy \cdot \underline{i} + (2x + z) \cdot \underline{k}$ és $\mathcal{F}: \underline{r}(u, v) = (u + 2v) \cdot \underline{i} - v \cdot \underline{j} + (u^2 + 3v) \cdot \underline{k}, \quad 0 \leq u \leq 3, \quad -2 \leq v \leq 0.$

Integrálredukciós tételek

Az alábbi feladatokban, ha lehetséges, valamelyik nevezetes integrálredukciós tétel (Stokes-, Green- vagy Gauss-Osztrogradszkij tétel) alkalmazásával számítsuk ki $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező integrálját a megadott tartományon. (Tehát vizsgáljuk, hogy alkalmazható-e valamelyik tétel, ha igen, akkor alkalmazzuk, ha nem, akkor más módon számítsuk ki az integrált.)

- 1) $\underline{v}(\underline{r}) = (2xy - z) \cdot \underline{i} + (x^2 + z) \cdot \underline{j} + (y - x) \cdot \underline{k}$, az integrálás útja a $16x^2 + 9y^2 = 144$ egyenletű elliptikus hengernek és a $z=2$ síknak a metszészvonala a \underline{k} egységvektorból visszanézve pozitív forgásiránnyal.
- 2) $\underline{v}(\underline{r}) = -x^2y \cdot \underline{i} + xy^2 \cdot \underline{j}$, az integrálás útja az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletű kör pozitív forgásiránnyal.
- 3) $\underline{v}(\underline{r}) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \underline{i} + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) \cdot \underline{j}$, az integrálás útja az $1 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$ egyenlőtlenségekkel megadott téglalapot határoló, zárt töröttvonal, pozitív körüljárási iránnyal.
- 4) $\underline{v}(\underline{r}) = x^2 \cdot \underline{i} + y^2 \cdot \underline{j} + z^2 \cdot \underline{k}$, az integrálási tartomány a koordinátasíkok és az $x^2 + y^2 + 2z = 1$ egyenletű felület által meghatározott zárt \mathcal{F} felület, kifelé mutató felületi normálvektorral.
- 5) $\underline{v}(\underline{r}) = xz \cdot \underline{i} + xy \cdot \underline{j} + yz \cdot \underline{k}$, az integrálási tartomány a $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ egyenletű felület és az xy koordinátasík által meghatározott zárt \mathcal{F} felület, befelé mutató felületi normálvektorral.