

Hausaufgaben 9.
Differentialgleichungen

Partikuläre Lösungen von trennbaren Diff.gl.

1. $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$; $y(-1) = 2$ $(y^2 - 3(2+x)^2 = 1)$

2. $y' = 1 + y^2$; $y(\pi/2) = 1$. Zeichnen Sie die Isoklinen auf. $(y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}))$

Allgemeine Lösung von trennbaren Diff.gl.

3. $y' = \frac{y}{x}$ Zeichnen Sie die Isoklinen auf!

Schreiben Sie und lösen Sie die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien!

$(y = cx, \text{ orthogonale Trajektorien: konzentrische Kreise})$

4. $y' = e^y \sin x$ $(y = -\ln(\cos x + c))$

5. $y(x+1)dy - x^3(y+1)dx = 0$ $(y - \ln(y+1) = x^3/3 - x^2/2 + x - \ln(x+1) + c)$

6. $(x \cos y)y' + \sin y = 0$ $(x \sin y = c, x \neq 0)$

Lösung der homogenen Diff.gl. durch die Substitution $u(x) = y/x$

7. $(x \cos \frac{y}{x})y' = y \cos \frac{y}{x} - x$ $(x e^{\sin \frac{y}{x}} = c)$

8. $(x^2 + y^2)y' = xy$ $(x^2 = 2y^2 \ln|cy|, \text{ singuläre Lösung: } y = 0)$

Exakte Diffgl.

9. $(6x^2 - 4xy + 2) + (-2x^2 - 3y^2 + 5)y' = 0$ $(f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 2x^2y + 2x + 5y + c)$

10. $(1 + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}})dx + (1 - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}})dy = 0$ $(f(x, y) = x + y + e^{\frac{x}{y}} + c)$

Lineare Diffgl.

11. $y' = y + x$; $y(0) = 0$. Zeichnen Sie die Isoklinen auf.

12. $y' = -xy + x$; $P(0, 7)$ $(y = (e^{x^2/2} + k)e^{-x^2/2} = 1 + ke^{-x^2/2}, k = 6, y_0 = 1 + 6e^{-x^2/2})$

13. $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ $(y = \frac{1}{2}x^3 + cx)$

14. $y' + y = e^{-x}$ $(y = e^{-x}(x + c))$

15. $y' = \frac{2}{x}y + x^2 + 1$, durch den Punkt $P_0(1, 1)$ $(y_0(x) = x^2(x - \frac{1}{x} + 1))$

16. $y' = \frac{2x}{1+x^2}y + 1 + x^2$ $(y = (x + c)(1 + x^2))$

17. $y' = -2xy + 2xe^{-x^2}$, $y(0) = 6$ $(y_0 = (x^2 + 6)e^{-x^2})$

Diff.gl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

18. $y'' - 6y' + 8y = 0$ $(c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x})$

19. $y'' + 2y' + y = 0$ $(y = e^{-x}(c_1 x + c_2))$

20. $y'' - y' + y = 0$ $(y = e^{x/2}(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$

21. $y'' - 3y' - 10y = 3e^{4x}$, $(\text{Ansatz: } Y = Ae^{4x}, A = -\frac{1}{2}, y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{4x})$