Hausaufgaben 5.

Fourier-Reihen

1. $f(x) = 1 - x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $f(x + 2\pi) = f(x)$

$(f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^k \sin kx)$

2. $f(x) = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$, $f(x + \pi) = f(x)$

$(f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1})$

3. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$, $-\pi < x \le \pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$, (sgn = signum = Vorzeichen)

$(f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1})$

Reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher

1. Rotieren Sie die Kurve $z = \mathrm{e}^x$ um die z Achse, und schreiben Sie die Gleichung der Rotationsfläche auf!

2. Rotieren Sie die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ um die x und um die y Achse, und ermitteln Sie die Gleichungen beider Rotationsflächen!

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xx}, und f''_{yy} der folgenden Funktionen:

3. $f(x, y) = x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$

4. $f(xy) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

5. Ermitteln Sie z'_x und z'_y für die implizite Funktion $e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = xyz$.

6. Berechnen Sie $z'_x(\frac{\pi}{4}, 0)$ und $z'_y(\frac{\pi}{4}, 0)$ für die Funktion $z = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$.

($\frac{\sqrt{2}}{2}$ und 0)

7. Zeigen Sie, dass die Funktion $z = y\sin(x^2 - y^2)$ die Differentialgleichung $\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$ erfüllt.

Berechnen Sie die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen im gegebenen Punkt:

8. $z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\mathbf{v}(1, -\sqrt{3})$, $P(3, 4)$ $(\frac{96+72\sqrt{3}}{625})$

9. $z = \sin xy$, $\alpha = 150°$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $y_0 = \pi$ $(\frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{\pi\sqrt{6}}{4})$

10. $z = e^y \ln x - xe^x$, $\alpha = 30°$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ $(\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 2e))$

Schreiben Sie die Gleichung der Tangentialebene im gegebenen Punkt auf

11. $z = \arcsin\frac{x}{y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ $(2x - y - 2\sqrt{3}z + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = 0)$

12. $z = (x - y)^{x+y}$, $x_0 = 2$, $y_0 = -2$ $((x + y)\ln 4 - z + 1 = 0)$

13. In welchem Punkt ist die Tangentialebene der Fläche $z = \ln xy$ parallel zu der Ebene $x+y+z = 0$?
.
$(x = -1,\ y = -1)$

Ermitteln Sie die lokalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

14. $z = x^3 + 3xy + y^3$ $(x_0 = -1,\ y_0 = -1,$ Max.)

15. $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$, $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le y \le 2\pi$ $(x_0 = \frac{2\pi}{3},\ y_0 = \frac{2\pi}{3},$ Max)

16. $z = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ $(x_0 = 0,\ y_0 = 0,$ Min.) $(x_0 = 0,\ y_0 = \pm 1,$ Max.)

17. $z = x^2 + x\ln y$ (keine Extremalstelle, im (0,1) Sattelpunkt)

18. Teilen Sie 12 in 3 Teile auf so, dass deren Produkt maximal ist (4, 4, 4)