

## Matematika A3 házi feladat Differenciálegyenletek

### Szöveges feladatok

- 1) Egy kavicsot tartunk egy kút kávjánál, majd elengedjük, és mérjük az időt addig, míg az bele nem csobban a vízbe. Ha 5 sec múlva halljuk a csobbanást, hány méter mély a kút?
- 2) Egy gépkocsi 72 km/h sebességről egyenletesen lassulva 10 sec alatt áll meg. Mekkora utat tesz meg ezalatt? (Azaz mekkora a fékút?)
- 3) Egy bányakőzet megvizsgált darabja 100 mg uránt és 14 mg ólmot tartalmaz. Ismert, hogy az urán felezési ideje  $4,5 \cdot 10^9$  év, és hogy 238 g urán teljes elbomlásakor 206 g ólom keletkezik. Állapítsuk meg a kőzet korát, ha feltehető, hogy keletkezése pillanatában nem tartalmazott ólmot.
- 4) Egy 10 l vizet tartalmazó edénybe literenként 0,3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 l/min sebességgel. Az edénybe belépő folyadék tökéletesen összekeveredik a vízzel, és a keverék ugyanolyan sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?
- 5) Tekintsük a következő ragadozó-zsákmány modellt! Válaszoljon a kérdésekre, és állításait mindig indokolja!

$$\begin{cases} \dot{X} = 2 - Y \\ \dot{Y} = -1,5 + 0,5X \end{cases}$$

- a) Melyik egyenlet fejezi ki a zsákmánypopuláció tömegességének időbeli változását, és melyik a ragadozópopulációét?
- b) Rajzolja fel a fázissíkot, ábrázolja benne az izoklínákat és az iránymezőt!
- c) Határozza meg az egyensúlyi helyzeteket!
- d) Mi történik a zsákmánypopulációval, ha a ragadozó nincs jelen?
- e) Mi történik a ragadozópopulációval, ha a zsákmány nincs jelen?

(Vegyes feladatok a köv. oldalon!)

## Vegyes feladatok

Az alábbi feladatokban mindig határozza meg a differenciálegyenlet (vagy kezdetiérték-probléma) típusát, majd oldja meg!

- 1) Ebben a feladatban határozza meg azt a  $D \subseteq \mathfrak{R}^{N+1}$  tartományt is, ahol a megoldás létezik ( $N = ?$ )!

$$y' = \frac{x-1}{y} \text{ és } y(3) = 1$$

- 2) Ebben a feladatban határozza meg a nem azonosan konstans megoldást, és jelöljön ki olyan  $D \subseteq \mathfrak{R}^{N+1}$  tartományt is, ahol a megoldás létezik ( $N = ?$ )!

$$y' = y \cdot \operatorname{tg}(x)$$

3)  $\sqrt{1-x^2} \cdot y' + xy = 0$

4)  $x^3 + y^3 - 3xy^2 y' = 0$

5)  $xy' + y = y^2$  és  $y(2) = -3$

6)  $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$

7)  $y''(1 + \sin(x))^2 + \cos(x) = 0$

8)  $2xe^{x^2} + y \cdot \operatorname{sh}(x) + (\operatorname{ch}(x) - 2\operatorname{ch}(2y)) \cdot y' = 0$

9)  $2x + \cos(y) - (x \cdot \sin(y)) \cdot y' = 0$  és  $y(1) = 0$

10)  $y'' + 4y' + 4y = 0$

11)  $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$  és  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ ,  $y''(0) = 4$

12)  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$  és  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ ,  $y''(0) = 5$

13)  $y'' - y = e^x(2x+3)$  és  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 4$

14)  $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

- 15) Az alábbi differenciálegyenlet-rendszer esetében vázolja fel az iránymezőt és az izoklinákat, határozza meg az egyensúlyi pontokat, és vizsgálja meg az origó (a rendszer) stabilitását!

$$\begin{cases} \dot{X} = 3X - 2Y \\ \dot{Y} = 1,5X + Y \end{cases}$$