Hausaufgaben 8 (Raumkurven)

1. Berechnen Sie die Krümmung der Parabel $y^2 = 2px$ im Scheitelpunkt!

$(y = t,\ x = \frac{t^2}{2p},\ \kappa = \frac{1}{p})$

2. Zeigen Sie, daß die Kurve (konische Spirale)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}e^t \cos t + \mathbf{j}e^t \sin t + \mathbf{k}e^t$$

auf der Kegelfläche $x^2 + y^2 = z^2$ liegt, und die Kantenvektoren des begleitenden Dreibeins mit der z-Achse konstante Winkel einschließen.

$(\cos(\mathbf{t}, \mathbf{k})\angle = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\angle = 0,\ \cos(\mathbf{b}, \mathbf{k})\angle = \frac{2}{\sqrt{6}}\ )$

3. Im welchen Punkten sind die Tangenten der Kurve

$$\mathbf{r}(t) = (3t - t^3)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + (3t + t^3)\mathbf{k}$$

parallel zu der Ebene $3x + y + z + 2 = 0$?

$(P_1(-2, 12, 14),\ P_2(-2, 3, -4))$

4. Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + (3t - 5)\mathbf{j} - (t^2 + 2)\mathbf{k}$$

eine ebene Kurve ist, und schreiben Sie die Gleichung dieser Ebene auf.

($\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (-6, -4, -6)$ konstant, Torsion=0, $3x + 2y + 3z + 16 = 0$)

5. Berechnen Sie die Krümmung und die Torsion der Kurve

$$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

im Punkt $t = 1$.

$(\kappa = \frac{2}{9},\ \tau = -\frac{2}{9})$

6. Berechnen Sie den Tangentenvektor, den Hauptnormalenvektor und den Binormalenvektor im Punkt $O(0, 0, 0)$ der Kurve

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

$(\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$

7. Berechnen Sie die Kantenvektoren des begleitenden Dreibeins, die Krümmung und die Torsion der Kurve

$$\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}\, t\mathbf{k}$$

im Punkt $t = 0$.

$((1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}),\ (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0),\ (-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}),\ 1/2\sqrt{2},\ -1/2\sqrt{2})$

8. Berechnen Sie die Koordinaten des Tangentenvektors an die Schnittkurve der Flächen $x + 3y + 4z - 26 = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 - 56 = 0$ im Punkt $P(6, 4, 2)$.

$(1, -11/5, 7/5)$

9. Berechnen Sie die Krümmung und die Torsion der Schnittlinie der Flächen $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ und $y^2 - 2x + z = 0$ im Punkt $P(1, 1, 1)$.

$(\kappa = 1/\sqrt{6},\ \tau = 1)$