1. házi feladat

1. Írjuk fel az $A(0;0;0)$, $B(1;2;3)$, $C(3;5;7)$ pontok és a $D(5;5;5)$, $E(3;2;1)$, $F(1;2;3)$ pontok által meghatározott síkok metszésvonalának az egyenletét.

2. Abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens?
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{5^{n+1}},\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{3}+(-1)^n\right)^n}{3^n},\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1},\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

3. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Jelöljünk ki olyan intervallumokat, ahol a konvergencia egyenletes!
$$a)\ f_n(x)=\operatorname{arctg}(nx),\quad b)\ f_n(x)=\sin\left(\frac{x}{n}\right),\quad c)\ f_n(x)=e^{n(x-1)},\quad d)\ f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

4. Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!
Ötlet: érdemes lehet deriválni vagy integrálni.
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n,\quad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n}$$

5. Számoljuk ki a következő függvények Maclaurin-sorát! Hol állítja elő a függvényt?
Ötlet c)-hez: $\operatorname{ch} x$ definíciója segíthet, d)-hez: trigonometrikus azonosság.
$$a)\ f(x)=x^2\ln(x+1),\quad b)\ f(x)=\frac{x}{2-x},\quad c)\ f(x)=e^x\operatorname{sh}3x,\quad d)\ f(x)=\cos(x+1)$$

6. Számoljuk ki a megadott mennyiségek $h=0,01$ hibán belüli közelítő értékét alkalmas függvény Taylor-polinomjának használatával!
$$a)\ \sin 1,\quad b)\ \cos\frac{1}{2},\quad c)\ \cos\frac{1}{8},\quad d)\ e^{-\frac{1}{3}}$$
Segítség: Egy Leibniz-típusú sor n-edik részletösszegének a sorösszegtől való eltérésének abszolút értéke felülről becsülhető az $n+1$-edik tag abszolút értékével.

7. Írjuk fel a megadott 2π szerint periodikus függvények Fourier-sorát!
$$a)\ f(x)=\begin{cases}-\pi, & \text{ha}\quad -\pi<x\le 0\\ x, & \text{ha}\quad 0<x\le\pi\end{cases}$$
$$b)\ f(x)=x^2,\ \text{ha}\ -\pi\le x<\pi\quad c)\ f(x)=x,\ \text{ha}\ -\pi\le x<\pi,$$

8. Számoljuk ki a következő mátrixhatványokat!
$$a)\ \begin{bmatrix}a&0\\0&1\end{bmatrix}^n,\quad b)\ \begin{bmatrix}0&b\\1&0\end{bmatrix}^n$$

9. Számoljuk ki az alábbi determinánsokat sor- és oszlopcserével, illetve a kifejtési tétel használatával is!
$$a)\ \begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&5&8\end{vmatrix},\quad b)\ \begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-3&4\\1&5&-8\end{vmatrix},\quad c)\ \begin{vmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&4\end{vmatrix},\quad d)\ \begin{vmatrix}0&1&-2\\1&-2&3\\-2&3&4\end{vmatrix}$$

10. Számoljuk ki a megadott mátrixok rangját!
$$a),\ \begin{bmatrix}0&-1&2\\-1&-2&3\\-2&-3&4\end{bmatrix},\quad b)\ \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&-2\\1&-1&0&1\\1&-2&-1&0\end{bmatrix},\quad c)\ \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\5&6&7&8&9\end{bmatrix}$$

11. Az $a,b\in\mathbb{R}$ paraméterek milyen értékeire lesz a megadott mátrix rangja $1,2,3$?
$$a)\ \begin{bmatrix}1&-2&-1\\-3&1&a\\b&0&5\end{bmatrix},\quad b)\ \begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&2a\\3&a&b\end{bmatrix},\quad c)\ \begin{bmatrix}a&1&b\\4&a&b\\3a&b+4&0\end{bmatrix}$$