# 1. Házi feladat – Vektoranalízis

Matematika A3

2014. február 18.

1. Bizonyítsa be, hogy a vektoriális szorzat teljesíti a Jacobi-azonosságot, azaz
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

2. Bizonyítsa be az alábbi azonosságokat ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$):
   (a) $\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(f) \cdot \mathbf{u} + f \operatorname{div}(\mathbf{u})$
   (b) $\operatorname{rot}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(f) \times \mathbf{u} + f \operatorname{rot}(\mathbf{v})$
   (c) $\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \operatorname{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{v})$

3. Tekintsük a síkon az
$$\mathbf{r}(t) = f(t)\cos(t)\mathbf{i} + f(t)\sin(t)\mathbf{j}$$
paraméteres egyenletű spirált (csigavonal). Mekkora a görbe $0 \leq t \leq 2\pi$ szakaszának (azaz egy körülfordulásnak) ívhossza, ha
   (a) $f(t) = t$ (arkhimédeszi spirál)
   (b) $f(t) = \alpha^t$ valamilyen rögzített $\alpha > 0$ értékkel (logaritmikus spirál)

4. Mennyi az
$$\mathbf{r}(t) = 2\sin(t)\mathbf{i} + 2\cos(t)\mathbf{j} + \left(\frac{t^2}{2} - \ln t\right)\mathbf{k}$$
térgörbe $1 \leq t \leq \sqrt{e}$ paraméterértékeknek megfelelő részének ívhossza?

5. Legyen a $z = 0$ sík a Föld felszíne. Az origóból $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ kezdősebességgel elhajítunk egy testet, így annak pályája
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}}{2}t^2$$
ahol $\mathbf{g} = -9{,}81\mathbf{k}$. Mekkora utat tesz meg a test a földetérésig?

6. Tekintsük a síkon az $x^4 - x^2y^2 + y^4 - xy + x = 1$ egyenletű (zárt) görbét. Mi az érintőegyenes egyenlete az $(x_0, y_0) = (1, 1)$ pontban?

7. Írja fel az
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6} = 1$$
egyenletű ellipszoid $(1, 1, 1)$ pontjában az érintősík egyenletét.

8. Adja meg az $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = (t-1)^2\mathbf{i} - (t^2 + 3t + 2)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$$

térgörbe érintőjének (paraméteres) egyenletét a $t_0 = 0$ paraméterű pontban.

9. Határozza meg az $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(u,v) = (4 + \cos(u))\cos(v)\mathbf{i} + (4 + \cos(u))\sin(v)\mathbf{i} + \sin(u)\mathbf{k}$$

tóruszfelület $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ paraméterű pontjában az érintősík egyenletét.

10. Legyen $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az alábbi vektormező:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + (y - z^2)\mathbf{j} + (2z - yx)\mathbf{k}$$

Határozza meg az $\mathbf{u}$ integrálját

(a) az origó középpontú, $x$-$y$ síkban felvő egységkörvonalon a $z$ tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási irányban

(b) ezen körvonal $y \geq 0$ félkörén az előbbivel megegyező irányban.

11. Integrálja az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

vektormezőt az $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = \left(2^{t+1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{t}{4 + 2t^2}\mathbf{j} + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)e^{(1-t)^2}\mathbf{k}$$

térgörbe mentén a $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékeknek megfelelő pontok között.

12. Határozza meg az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}(x,y,z) = (x^2 + 2xy - x)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$$

vektormező integrálját az origó középpontú $R = 2$ sugarú gömb felületére kifelé mutató irányítás mellett.

13. Számítsuk ki az $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

vektormező integrálját

(a) az $(5,0,0)$ középpontú 1 sugarú gömbfelületen kifelé mutató irányítás mellett

(b) az origó középpontú 1 sugarú gömbfelületen kifelé mutató irányítás mellett

14. Egy $R$ sugarú kör keresztmetszetű csőben víz folyik. Ha a cső tengelyét választjuk $z$ tengelynek, akkor a víz áramlási sebességét az $(x, y, z)$ pontban a $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}(x, y, z) = -\frac{1}{4\mu}\alpha(R^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

vektor-vektor függvény értéke adja meg (m/s egységben) a csövön belül, míg az $(x, y, z)$ pontbeli nyomás értékét a $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$p(x, y, z) = \alpha z$$

vektor-skalár függvény adja meg (Pa egységben).

(a) Ellenőrizzük, hogy $\mathbf{v}$ kielégíti az összenyomhatatlan folyadékra vonatkozó kontinuitási egyenletet, azaz $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$

(b) Ellenőrizzük, hogy a $\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$ sebesség és a $p$ nyomás kielégíti a $\varrho$ sűrűségű összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlására vonatkozó Navier-Stokes-egyenletet, azaz

$$\varrho\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\triangle v_x$$
$$\varrho\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} v_y = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\triangle v_y$$
$$\varrho\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\triangle v_z$$

(c) Hány $\mathrm{m}^3$ víz áramlik át a $z = 0$ síkon 1s alatt?

15. Az $[0, 1]^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ egységkockát kitöltő homogén, izotróp testben a hőmérséklet a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$T(x, y, z) = 250 + 10\sin(\pi x)\sin(\pi y)\sinh(\sqrt{2}\pi z)$$

skalármezővel írható le.

(a) Ellenőrizzük, hogy a megadott függvény a hővezetési egyenlet stacionárius megoldása, azaz $\triangle T = 0$.

(b) Milyen irányú a hőáramlás az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ pontban, azaz milyen irányú itt $\operatorname{grad} T$?

16. Mekkora a felszíne az $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$$

felület $u^2 + v^2 \leq 1$ paramétertartománynak megfelelő darabjának?

17. Határozza meg az origó középpontú, $m$ tömegű, igen vékony gömbhéj alakú, homogén test tehetetlenségi nyomatékát a $z$ tengelyre nézve, ha a sugara $R$, vagyis az

$$f(x, y, z) = \frac{m}{4\pi R^2}(x^2 + y^2)$$

függvény felszíni integrálját a $(0, 0, 0)$ középpontú $R$ sugarú gömb felszínén.

18. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt és $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ vektort választva $\omega = c|\mathbf{k}|$ esetén az

$$u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

függvény (időtől függő vektormező) kielégíti a hullámegyenletet, azaz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u$$

ahol a $\triangle$ Laplace-operátor az $\mathbf{r} = (x, y, z)$ térkoordináták szerinti parciális deriváltakból a szokásos módon épül fel.

19. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény és jelölje $\varrho$ az $(x, y, z)$ pont $z$ tengelytől mért távolságát, azaz $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{grad} f(\varrho) = \frac{x}{\varrho} f'(\varrho)\mathbf{i} + \frac{y}{\varrho} f'(\varrho)\mathbf{j}$$

minden olyan pontban, ahol $\varrho \neq 0$.

20. A $[0,1]^3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ egységkockát inhomogén anyag tölti ki, melynek sűrűsége a $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\varrho(x, y, z) = 1 + x + 2y + 3z$$

függvény szerint alakul.

(a) Mekkora a kocka tömege, vagyis a $\varrho$ térfogati integrálja a kockán?

(b) Mik a kocka tömegközéppontjának koordinátái, vagyis az $x\varrho(x, y, z)$, $y\varrho(x, y, z)$ és $z\varrho(x, y, z)$ függvények térfogati integráljai a kockán elosztva a tömeggel?