

2. Házi feladat – Differenciálegyenletek

Matematika A3

2014. március 25.

Az alábbi feladatokban szereplő differenciálegyenletekben az egyszerűség kedvéért az egyváltozós $y(x), y_1(x), \dots$ függvények és deriváltjaik esetén a változó nincsen feltüntetve.

1. Határozza meg az

$$y' = x^2 - y$$

egyenlet $y(0) = 0$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldásának szukcesszív approximációjával kapott első három közelítő függvényt.

2. Euler módszerével számítsa ki az $y'(x) = 1 + xy(x)$ differenciálegyenlet $y(1) = 0$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldásának közelítő értékét $h = 0,1$ lépéshossz mellett $x = 1$ és $x = 1,5$ között.

3. Határozza meg a

$$2y^2 + 3y = 3xy$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

4. Oldja meg az

$$xy^2y' = x^3 + y^3$$

differenciálegyenletet $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

5. Határozza meg az $y' = e^{-x} \cos(x)y$ differenciálegyenlet $y(0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ kezdeti feltételnek megfelelő megoldását.

6. Oldja meg az

$$xy' - y = x^3 + 1$$

differenciálegyenletet $y(2) = 5$ kezdeti feltétellel.

7. Adja meg az

$$x^2y'' + \ln x - 1 = 0$$

differenciálegyenletet általános megoldását.

8. Adja meg az

$$yy'' + y'^2 + 1 = 0$$

differenciálegyenletet összes megoldását.

9. Oldja meg a

$$3x^2y^2y' + 2xy^3 = 0$$

differenciálegyenletet $y(1) = 2$ kezdeti feltétellel.

10. Egyváltozós integráló tényezővel tegye egzakttá az

$$(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$$

differenciálegyenletet, majd oldja meg $y(1) = 3$ kezdeti feltétellel.

11. Keressen integráló tényezőt az

$$(1 + x^2)y' + 4xy + 4x \cos x - (1 + x^2) \sin x = 0$$

differenciálegyenlethez, majd oldja meg az annak segítségével kapott egzakt egyenletet.

12. Határozza meg az

$$y^{(4)} + 3y''' - 7y'' - 15y' + 18y = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

13. Határozza meg az

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

14. Oldja meg az

$$y'' - 4y + 2 = 0$$

differenciálegyenletet $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltétellel.

15. Határozza meg az

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = x(x^2 + 1)^2$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

16. Oldja meg az

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x^2 - 1$$

differenciálegyenletet.

17. Sorfejtés segítségével határozza meg az

$$y'' - 2xy' = -8y$$

differenciálegyenlet $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

18. Laplace-transzformáció alkalmazásával oldja meg az

$$y'' - 4y' + 9y = -\cos x$$

differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

19. Határozza meg az

$$y_1' = -y_1 - y_2$$

$$y_2' = y_1 - y_3$$

$$y_3' = y_2 + y_3$$

differenciálegyenlet-rendszer $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_3(0) = -1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldását.

20. Hol vannak az

$$y_1' = 2 - 2y_1 - 2y_2 + 2y_1y_2$$

$$y_2' = y_2y_3$$

$$y_3' = -12 + 6y_1 - 6y_3 + 3y_1y_3$$

differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjai (egyensúlyi helyzetei)? Állapítsa meg, hogy ezek közül melyek stabilak.