Hausaufgaben 7.

1. Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_B xe^y \, dB,$$

wo das Gebiet B durch die Kurven $y = x$ und $y = x^2$ begrenzt ist. $(-\frac{1}{2}e + \frac{3}{2})$

2. Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_B (x+y) dx \, dy,$$

wo der Bereich ein Quadrat mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ und $(0,-1)$ in der xy Ebene liegt. (0)

3. Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x,y) = xy$ über dem Dreiecksbereich mit den Eckpunkten $P_1(1,1)$, $P_2(4,5)$, $P_3(4,2)$.

$(\int_{x=1}^{4} \int_{y=1/3x+2/3}^{4/3x-1/3} xy \, dy \, dx)$

4. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ über dem Trapez mit den Eckpunkten $P_0(0,0)$, $P_1(1,2)$, $P_2(5,2)$, $P_3(6,0)$.

$(\int_{y=0}^{2} \int_{x=y/2}^{6-y/2} \sqrt{x+y} \, dx \, dy)$

5. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = 2x^3 y$ zwischen der Geraden $y = -x + R$ und dem Kreis $x^2 + y^2 = R^2$.

$(\frac{1}{15} R^6)$

6. Berechnen Sie das Volumen des gestumpften Zylinders, dessen Basisfläche der Kreis $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ ist, und von oben durch die Ebene $z = x + y + 6$ begrenzt ist. (6π)

7. Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_B xy \, dx \, dy$$

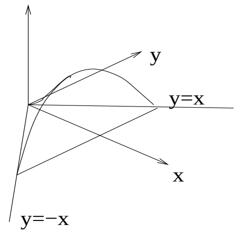
über dem Bereich $(x-2)^2 + y^2 \le 4$. (0)

8. Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_B (x^2 + 2y^2) \, dB$$

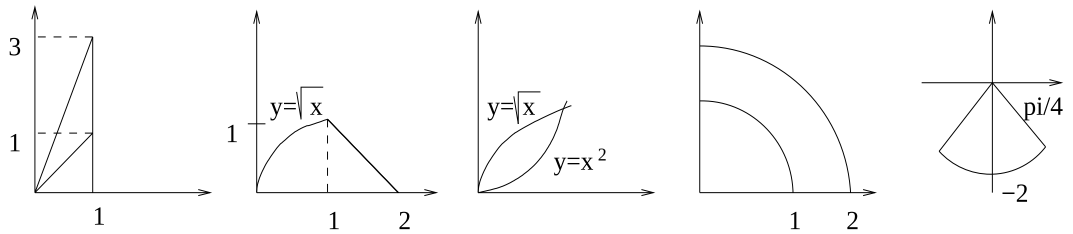
B : Kreisring mit dem inneren Radius 1 und außeren Radius 2. $(45\pi/4)$

9. Ermitteln Sie den Schwerpunkt des Körpers, dessen begrenzende Flächen $z = x^2 - y^2$ $(z \geq 0)$, $z = 0$ und $x = 1$ sind.



($M = 1/3$, $M_{yz} = 4/15$, $M_{xy} = 4/45$, $M_{xz} = 0$, $S(4/5, 0, 4/15)$)

10. Beschreiben Sie die folgenden Bereiche



11. Berechnen Sie das Volumen des 3D Bereiches begrenzt durch $x = 0$, $z = 0$, $y^2 = 4 - x$, $z = y + 2$.

($\int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-y^2} \int_{0}^{y+2} dz\, dx\, dy = 64/3$)

12. Berechnen Sie die Koordinaten des Gewichtspunktes der Halbkugel: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z > 0$, wenn die Massendichte mit dem Abstand zwischen ihren Punkten und der z Achse proportional ist. (Rechnen Sie mit Kugelkoordinaten!)

($M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r \ \sin\vartheta r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi \ = 81\pi^2/8$, $S(0, 0, 16/5\pi)$)

13. Integrieren Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

über dem Bereich

$$\sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 9,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 81$$

($\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_3^9 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \ = 6\pi(2 - \sqrt{3})$)