Geometria 1. házi feladat matematikus hallgatók részére

2015-2016 I. félév

1. Proklosz említi az 5. században a következő paradoxont az 5. posztullátumhoz kapcsolódóan Euklideszi geometriában:

   Legyen AC egyenes az, amelyik metszi az AB és CD egyeneseket, és legyen E az AC felezőpontja. Vegyünk fel az AC szelőnek azon az oldalán, ahol a belső szögek összege kisebb két derékszögnél az AB-n egy AF és a CD-n egy CG szakaszt, melyek AE-vel egyenlők. Az AB és a CD egyenesek nem találkozhatnak az AF és a CG szakaszokon belül, mivel egy háromszögben minden oldalnak kisebbnek kell lennie a másik kettő összegénél. Kössük össze az F és a G pontot és az előbbi eljárást ismételjük meg: legyen e szakasz középpontja H, mérjük fel az FG szakasz felével egyező FK és a GL szakaszokat az AB illetve a CD egyenesekre. Ezek nem találkozhatnak az F, K és a G, K pontok között. Mivel e művelet vég nélkül folytatható, következésképpen AB és CD sohasem találkoznak.

   Mi a hiba az alábbi gondolatmenetben?

2. (a) Döntsük el, hogy az alábbi vektorok komplanárisak-e (egysíkúak-e):

   $$(2,3,-1)^T;\ (1,-1,3)^T;\ (1,9,-11)^T;$$

   (b) Mekkora a $\mathbf{v}(-9,1,1)^T$ vektornak a $\mathbf{c}(5,-6,30)^T$ irányú egyenesen levő vetülete?

   (c) Az ABC háromszög csúcsainak a koordinátái $A(-3,4,0)^T$, $B(-9,11,42)^T$, $C(1,2,4)^T$. Mekkora a háromszög területe és mekkorák a szögei?

3. Legyenek az ABC háromszög oldalain adottak az N, H és O pontok, ahol N a CB szakasz B-hez közelebbi negyedelő pontja, H a CB szakasz C-hez közelebbi harmadoló pontja, O pedig az AC szakasz C-hez közelebbi ötödölő pontja. Legyen továbbá $AH \cap OB = D$ és $AN \cap OB = G$. Számítsuk ki, hogy D és G pontok milyen arányban osztják fel OB szakaszt és határozzuk meg az ABC és ADG háromszögek területének az arányát.

4. Adva van egy egyenes, melynek egyenletrendszere

   $$\frac{x-8}{2} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

Továbbá egy sík, mely párhuzamos az előbbi egyenessel és egyenlete

$$3x + by + 2z + 12 = 0$$

Határozzuk meg b értékét és a két térelem távolságát.

5. Adva van egy $ABCD$ rombusz, amely benne van az

$$5x + 8y + 11z = 0$$

egyenletű síkban. A rombusz két csúcsa $A(8, -5, 0)^T$ és $C(-2, y, 6)^T$, továbbá a BD átlójának hossza $BD = 4\sqrt{6}$. határozzuk meg a B és a D csúcsok koordinátáit.

Minden feladat 1 pontos, a nem teljes megoldásokra részpontszámok kaphatók a lényeges lépésekre.

Beadási határidő: 2015. szeptember 29. (legkésőbb az előadáson).

Jó munkát kívánunk!