1. házi feladat

1.feladat A gondolatmenet odáig helyes, hogy ezen művelet folytatása során keletkező szakaszokon a két egyenes nem találkozhat. A hiba az, hogy ebből arra következtet, hogy emiatt nem találkozhatnak sehol az adott félegyenesek. Ez a következtetés azért hibás, mivel a művelet ismétlése során keletkező szakaszok hosszának összege konvergens lesz, tehát nem fedik le a félegyeneseket. Itt a bizonyításhoz hozzátartozik, hogy megmutassuk, hogy a keletkező transzverzális szakaszok hossza csökkenő sorozatot alkot és a szakaszok összege véges. Ebben az esetben elfogadjuk ennek szemléletes ismertetését is.

2.feladat

a Három vektor vegyesszorzata az általuk kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát adja. Ha vegyesszorzatuk 0, a vektorok egysíkúak.
Legyen $\mathbf{a} := (2,3,-1)^T$, $\mathbf{b} := (1,-1,3)^T$, $\mathbf{c} := (1,9,-11)^T$. Vegyesszorzatuk $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$=\mathbf{i}(9-1)-\mathbf{j}(6+1)+\mathbf{k}(-2-3)=(8,-7,-5)^T$

Ennek skaláris szorzata a $\mathbf{c}$ vektorral $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} = 8*1-7*9+11*5=0$

Tehát a vektorok egysíkúak.

b A $\mathbf{v}(-9,1,1)^T$ vektor $\mathbf{c}(5,-6,30)^T$ vektorra való vetülete a $(\mathbf{v}\mathbf{e_c})\,\mathbf{e_c}$ képletből kapható meg, ahol $\mathbf{e_c} = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$.

Mivel $|\mathbf{c}| = \sqrt{25+36+900} = 31$, így $\mathbf{e_c} = \frac{(5,-6,30)^T}{31} = (\frac{5}{31}, -\frac{6}{31}, \frac{30}{31})$.

Tehát a $(\mathbf{v}\mathbf{e_c})$ skaláris szorzat: $(-9,1,1)^T(\frac{5}{31}, -\frac{6}{31}, \frac{30}{31})^T = -\frac{21}{31}$, a merőleges vetület pedig: $-\frac{21}{31}(\frac{5}{31}, -\frac{6}{31}, \frac{30}{31})^T = (-\frac{105}{31}, \frac{126}{31}, -\frac{630}{61})^T$, melynek hossza 21.

c A háromszög csúcsai: $A(-3,4,0)^T, B(-9,11,42)^T, C(1,2,4)^T$. A terület kiszámítása több módon is lehetséges.

<u>1.módszer</u> Alkalmazzuk a Heron-képletet, mely szerint a T=$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol $s = \frac{a+b+c}{2}$ és a,b,c a háromszög oldalai.
$\mathbf{a} = \overrightarrow{BC} = (10,-9,-38)^T$ és hossza $5\sqrt{65}$.
$\mathbf{b} = \overrightarrow{CA} = (-4,2,-4)^T$ és hossza 6.
$\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = (-6,7,42)^T$ és hossza 43.

Ekkor $s = \frac{a+b+c}{2} = 44,65$. A Heron-képletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy a T≈111.

<u>2.módszer</u> T=$\frac{|a||b|sin\gamma}{2}$.
$|\mathbf{a}| = 5\sqrt{65}$, $|\mathbf{b}| = 6$, a $sin\gamma$ pedig kiszámítható a $sin\gamma = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$ képlettel.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10 & -9 & -38 \\ -4 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$=\mathbf{i}(36+76) - \mathbf{j}(-40-152) + \mathbf{k}(20-36) = (112, 192, -16)^T$, és $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 16\sqrt{194}$.

Ezzel $sin\gamma = 0,92138$

A képletbe behelyettesítve T=$\frac{30\sqrt{65}sin\gamma}{2}$ ≈111.

Hasonlóképp kiszámítható:
$\sin\alpha = 0,86378$, tehát $\alpha = 59,74$, és $\sin\beta = 0,12857$, tehát $\beta = 7,39$.
Innen $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 112,87$.

A legnagyobb oldallal szemben lévő szöget nem tudjuk egyértelműen meghatározni annak szinuszából, ezért kell gammát utoljára kiszámolni.

3.feladat Jelölje $\overrightarrow{AB}$ vektort **b**, és $\overrightarrow{AC}$ vektort **c**. Ekkor a következők adódnak:

- $O = \frac{4}{5}\mathbf{c}$
- $N = \mathbf{b} + \frac{1}{4}(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = \frac{3}{4}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{c}$
- $H = \mathbf{b} + \frac{2}{3}(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$

G ezek után megkapható két paraméteres egyenletből:
$G \in OB \Rightarrow G = \alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)O = \alpha\mathbf{b} + (\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\alpha)\mathbf{c}$
$G \in AN \Rightarrow G = \beta N = \frac{3}{4}\beta\mathbf{b} + \frac{1}{4}\beta\mathbf{c}$
Tehát: $\alpha = \frac{3}{4}\beta$ és $(\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\alpha) = \frac{1}{4}\beta$, amiből $\alpha = \frac{12}{17}$, és $\beta = \frac{16}{17}$ adódik.
Visszahelyettesítve megkapjuk, hogy $G = \frac{12}{17}\mathbf{b} + \frac{4}{17}\mathbf{c}$

Hasonlóan megy D meghatározása:
$D \in OB \Rightarrow G = \gamma\mathbf{b} + (1-\gamma)O = \gamma\mathbf{b} + (\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\gamma)\mathbf{c}$
$D \in AH \Rightarrow D = \delta H = \frac{1}{3}\delta\mathbf{b} + \frac{2}{3}\delta\mathbf{c}$
Tehát: $\gamma = \frac{1}{3}\delta$ és $(\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\gamma) = \frac{2}{3}\delta$, amiből $\gamma = \frac{2}{7}$, és $\delta = \frac{6}{7}$ adódik.
Visszahelyettesítve megkapjuk, hogy $D = \frac{2}{7}\mathbf{b} + \frac{4}{7}\mathbf{c}$

Most vizsgáljuk meg milyen arányban osztja G és D az OB szakaszt:

- $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} - \frac{4}{5}\mathbf{c}$
- $\overrightarrow{OD} = (\frac{2}{7}\mathbf{b} - \frac{4}{7}\mathbf{c}) - \frac{4}{5}\mathbf{c} = \frac{2}{7}\mathbf{b} - \frac{8}{35}\mathbf{c} = \frac{2}{7}\overrightarrow{OB} = \frac{34}{119}\overrightarrow{OB}$

- $\overrightarrow{OG} = (\frac{12}{17}\mathbf{b} - \frac{4}{17}\mathbf{c}) - \frac{4}{5}\mathbf{c} = \frac{12}{17}\mathbf{b} - \frac{48}{85}\mathbf{c} = \frac{12}{17}\overrightarrow{OB} = \frac{84}{119}\overrightarrow{OB}$

Tehát G és D pontok $34 : 50 : 35$ arányban osztják OB szakaszt.

Ezek utána a területek aránya már egyszerűen adódik:
(azonos magasságú háromszögek területének aránya, és az ehhez a magassághoz tartozó oldalak arányát ismerjük)
$T_{ABO} = \frac{4}{5}T_{ABC}$
$T_{AGD} = \frac{50}{119}T_{ABO} = \frac{40}{119}T_{ABC}$

4.feladat Az e egyenes egyenletrendszere: $\frac{x-8}{2} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-4}{3}$. Ez felírható paraméteres alakban is:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t + 8 \\ y &= 2t - 9 \\ z &= 3t + 4 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

amiből látható az egyenes $\mathbf{v} = (2, 2, 3)^T$ irányvektora.

Az α sík egyenlete $3x + by + 2z + 12 = 0$, így rögtön láthatjuk a normálvektorát, ami $\mathbf{n} = (3, b, 2)^T$.

Tudjuk, hogy az e egyenes párhuzamos az α síkkal. Ez azt jelenti, hogy a sík $\mathbf{n}$ normálvektora az egyenes irányvektorára is merőleges. Ennek segítségével megkaphatjuk a b paramétert. Két vektor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla, tehát:

$$3 * 2 + 2 * b + 2 * 3 = 0 \tag{2}$$

$$2 * b = -12 \tag{3}$$

$$b = -6 \tag{4}$$

Egyenes és sík távolságát az egyenes egy pontjának a síkkal való távolságaként értelmezzük. A paraméteres egyenletből megkapható a $P = (8, -9, 4)^T$ pont, ami rajta van az e egyenesen.
A $P = (p_1, p_2, p_3)^T$ pont, és a $Ax + By + Cy + D = 0$ egyenletű sík előjeles távolságának képlete:

$$d = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{5}$$

vagyis esetünkben $d = 14$.

5.feladat Az α sík egyenlete $5x + 8y + 11z = 0$, tehát egy normálvektora az $\mathbf{n} = (5, 8, 11)^T$. A C csúcs y koordinátája meghatározható az egyenletből, hiszen akkor része a síknak, ha kiegyenlíti az egyenletét. Tehát

$$5 * (-2) + 8 * y + 11 * 6 = 0$$

$$y = -7$$

Jelölje E az AC átló felezőpontját. Mivel $A = (8, -5, 0)^T$ és $C = (-2, -7, 6)^T$, ezért $E(\mathbf{e}_1) = (3, -6, 3)^T$.

Tudjuk, hogy a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, és a BD átló hossza $4\sqrt{6}$, tehát annyit kell tenni, hogy E pontból AC átlóra merőlegesen felmérünk $2\sqrt{6}$-ot α síkjában mindkét irányba, és ezzel megkapjuk B és D csúcsokat.

$\overrightarrow{AC} = (-10, -2, 6)^T$ ennek az irányvektora legyen $\mathbf{e} = (-5, -1, 3)^T$
A keresett irány egy vektoriális szorzással adódik:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 8 & 11 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= \mathbf{i}(24 + 11) - \mathbf{j}(15 + 55) + \mathbf{k}(-5 + 40) = (35, -70, 35)^T$
BD átló irányába eső egységvektor:

$$\mathbf{f} := \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{e}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{e}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T$$

B és D csúcsok helye:
$\mathbf{e}_1 \pm 2\sqrt{6}\mathbf{f} = (3, -6, 3)^T \pm (2, -4, 2)^T$
Tehát: $B = (5, -10, 5)^T$, $D = (1, -2, 1)^T$