2. házi feladat

1.feladat A baloldalon álló vegyesszorzat tagjai a kifejtési-tételt, és a vegyesszorzat tulajdonságait felhasználva átírhatók a következő alakokra:
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{abc})\mathbf{b} - (\mathbf{bbc})\mathbf{a} = (\mathbf{abc})\mathbf{a}$
$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{abc})\mathbf{c} - (\mathbf{cca})\mathbf{b} = (\mathbf{abc})\mathbf{c}$
$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{abc})\mathbf{a} - (\mathbf{aba})\mathbf{c} = (\mathbf{abc})\mathbf{a}$
A vegyesszorzat definíciója szerint az első két tagot vektoriálisan szorozzuk egymással, majd az az így kapott vektort skalárisan szorozzuk a harmadik taggal. A vektoriális szorzás eredménye, felhasználva a vektoriális szorzat tulajdonságait:
$(\mathbf{abc})^2(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
Ennek skaláris szorzata a harmadikkal:
$(\mathbf{abc})^2(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{abc})\mathbf{a} = (\mathbf{abc})^4$
Ezzel beláttuk az állítást.

2.feladat Ismert csúcsok: $A(5, -1, 3)^T$, $B(3, 2, 9)^T$
Továbbá tudjuk, hogy $\overrightarrow{AD} || \mathbf{v}(x, -4, 6)^T$, és $\overrightarrow{AA_x} || \mathbf{w}(9, y, z)^T$.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 6)^T$ merőleges $\mathbf{v}$-re, tehát: $(-2, 3, 6)^T(x, -4, 6)^T = 0$.
Innen $x = 12$ adódik, tehát $\mathbf{v} = (12, -4, 6)^T$.
$|\overrightarrow{AB}| = 7$, $|\mathbf{v}| = 14$, tehát $\overrightarrow{AD} = \pm\frac{\mathbf{v}}{2}$
Innen két megoldást kapunk D-re: $D = (5, -1, 3)^T \pm (6, -2, 3)^T$.

Hasonlóan $\mathbf{w}$ merőleges $\overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{v}$ vektorokra, amiből 2 egyenletet kapunk:
$(-2, 3, 6)^T(9, y, z)^T = 0$ és $(12, -4, 6)^T(9, y, z)^T = 0$.
Innen $y = 18$ és $z = -6$, tehát $\mathbf{w} = (9, 18, -6)^T$.
$|\overrightarrow{AB}| = 7$, $|\mathbf{w}| = 21$, tehát $\overrightarrow{AA_x} = \pm\frac{\mathbf{w}}{3}$
Innen két megoldást kapunk A_x-re: $A_x = (5, -1, 3)^T \pm (3, 6, -2)^T$.

A maradék 4 csúcs már könnyedén adódik, hiszen ismerjük az összes oldal irányvektorát:
$C = D + \overrightarrow{AB}$, $B_x = B + \overrightarrow{AA_x}$, $C_x = C + \overrightarrow{AA_x}$, $D_x = D + \overrightarrow{AA_x}$.
Így összesen 4 különböző megoldás van:

- $D = (11, -3, 6)^T$, $C = (9, 0, 12)^T$
  $A_x = (8, 5, 1)^T$, $B_x = (6, 8, 7)^T$
  $D_x = (14, 3, 4)^T$, $C_x = (12, 6, 10)^T$
- $D = (11, -3, 6)^T$, $C = (9, 0, 12)^T$
  $A_x = (2, -7, 5)^T$, $B_x = (0, -4, 11)^T$
  $D_x = (8, -9, 8)^T$, $C_x = (6, -6, 14)^T$
- $D = (-1, 1, 0)^T$, $C = (-3, 4, 6)^T$
  $A_x = (8, 5, 1)^T$, $B_x = (6, 8, 7)^T$
  $D_x = (2, 7, -2)^T$, $C_x = (0, 10, 4)^T$
- $D = (-1, 1, 0)^T$, $C = (-3, 4, 6)^T$
  $A_x = (2, -7, 5)^T$, $B_x = (0, -4, 11)^T$
  $D_x = (-4, -5, 2)^T$, $C_x = (-6, -2, 8)^T$

3.feladat Ismert csúcsok: $A(1,2,3)^T$, $A_1(3,5,9)^T$, $C(10,-2,2)^T$

Először meghatározom $ABCD$ oldal csúcsait:
Jelölje E az $ABCD$ oldal lapátlóinak metszéspontját.
$E = \frac{1}{2}(A+C) = (\frac{11}{2}, 0, \frac{5}{2})^T$, $\overrightarrow{AE} = (\frac{9}{2}, -2, -\frac{1}{2})^T$, $|\overrightarrow{AE}| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$
A következő három vektor páronként merőleges egymásra:
$\mathbf{a} := \overrightarrow{AA_1} = (2,3,6)^T$, $\mathbf{e} := \overrightarrow{AC} = (9,-4,-1)^T$, $\mathbf{f} := \overrightarrow{BD}$
Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{f}$ párhuzamos $\mathbf{a} \times \mathbf{e}$ vektorral.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{e} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 9 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$=\mathbf{i}(-3+24) - \mathbf{j}(-2-54) + \mathbf{k}(-8-27) = (21, 56, -35)^T$
Ezután már csak fel kell mérni E-ből $|\overrightarrow{AE}| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ nagyságú $(\mathbf{a} \times \mathbf{e})$-vel párhuzamos vektort mindkét irányba, és megkapjuk B és D csúcsok helyét.
$B, D = E \pm \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{e}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{e}|}|\overrightarrow{AE}| = (\frac{11}{2}, 0, \frac{5}{2})^T \pm (\frac{3}{2}, 4, \frac{-5}{2})^T$
Tehát: $B = (7,4,0)^T$, $D_(4,-4,5)^T$

A maradék csúcsokat ezután már könnyű meghatározni, hiszen ismerjük $\overrightarrow{AA_1} = (2,3,6)^T$ vektort.
$B_1 = B + \overrightarrow{AA_1} = (7,4,0)^T + (2,3,6)^T = (9,7,6)^T$
$C_1 = C + \overrightarrow{AA_1} = (10,-2,2)^T + (2,3,6)^T = (12,1,8)^T$
$D_1 = D + \overrightarrow{AA_1} = (4,-4,5)^T + (2,3,6)^T = (6,-1,11)^T$

Szimmetria miatt látszik, hogy AC lapátló legközelebbi pontja a hozzá kitérő helyzetű BD_1 testátlóhoz éppen E.
$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD_1} = (9,-4,-1)^T \times (1,5,-11)^T = (49,98,49)^T$
Ezért legyen a normáltranszverzális irányvektora: $\mathbf{v} = (1,2,1)^T$
Jelölje P a normáltranszverzális BD_1 átlóval való metszéspontját.
$P = E + k\mathbf{v} \in BD_1 \Rightarrow E + k\mathbf{v} = B + t\overrightarrow{BD_1}$
Tehát $(\frac{11}{2} + k, 2k, \frac{5}{2} + k)^T = (7+t, 4+5t, -11t)^T$, amiből $k = \frac{7}{6}$ és $t = -\frac{1}{3}$.
Visszahelyettesítve $P = (\frac{20}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3})^T$, $\overrightarrow{EP} = (\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6})^T$, $|\overrightarrow{EP}| = \frac{7}{\sqrt{6}}$

A keresett távolság tehát $\frac{7}{\sqrt{6}}$.

4.feladat Ismert csúcsok: $A(2,-1,1)^T$, $C(6,y,4)^T$
α jelölje ABC síkját: $x + 5y + 7z - 4 = 0$, normálvektora: $\mathbf{n} = (1,5,7)^T$
$C \in \alpha \Rightarrow 6*1+5y+7*4-4 = 0$, amiből $y = -6$ adódik. Tehát $C = (6,-6,4)^T$.

Jelölje F az AC szakasz felezőpontját $F = (4, -\frac{7}{2}, \frac{5}{2})^T$
A következő három vektor páronként merőleges egymásra:
$\mathbf{n} = (1,5,7)^T$, $\mathbf{b} := \overrightarrow{AC} = (4,-5,3)^T$, $\mathbf{m}_b := \overrightarrow{FB}$
Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{m}_b$ párhuzamos $\mathbf{b} \times \mathbf{n}$ vektorral.

$$\mathbf{b} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$=\mathbf{i}(-35-15)-\mathbf{j}(28-3)+\mathbf{k}(20+5)=(-50,-25,25)^T$

B-t megkapjuk, ha felmérünk $\frac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{b}|$ nagyságú $\pm(\mathbf{b}\times\mathbf{n})$ irányú vektort F-ből.
$|\mathbf{b}|=\sqrt{16+25+9}=5\sqrt{2}$, Tehát:
$B=F\pm\frac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{b}|\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{n}}{|\mathbf{b}\times\mathbf{n}|}=(4,-\frac{7}{2},\frac{5}{2})^T\pm(5,\frac{5}{2},-\frac{5}{2})^T$
Ezzel két megoldást kaptunk B-re: $B_1=(9,-1,0)^T$ és $B_2=(-1,-6,5)^T$

B_1-el számolva: Jelölje O_1 az ABC szabályos háromszög középpontját.
$O_1=F+\frac{1}{3}\overrightarrow{FB_1}=(4,-\frac{7}{2},\frac{5}{2})^T+\frac{1}{3}(5,\frac{5}{2},-\frac{5}{2})^T=(\frac{17}{3},-\frac{8}{3},\frac{5}{3})^T$

Tudjuk, hogy a gúla magassága $\frac{1}{\sqrt{6}}|\mathbf{b}|=\frac{5}{\sqrt{3}}$, iránya $\pm\mathbf{n}$, és $|\mathbf{n}|=5\sqrt{3}$. Innen M-re két megoldás adódik B_1-hez ($B_3=B_1$):
$M_{1,3}=O_1\pm\frac{5}{\sqrt{3}}\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}=(\frac{17}{3},-\frac{8}{3},\frac{5}{3})^T\pm(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3})^T$
$M_1=(6,-1,4)^T$, $M_3=(\frac{16}{3},-\frac{13}{3},-\frac{2}{3})^T$

Hasonlóan B_2-vel számolva is kapunk két megoldást M-re ($B_4=B_2$):
$M_{2,4}=(\frac{7}{3},-\frac{13}{3},\frac{10}{3})^T\pm(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3})^T$
$M_2=(\frac{8}{3},-\frac{8}{3},\frac{17}{3})^T$, $M_4=(2,-6,1)^T$
Így összesen 4 lehetséges megoldása van a feladatnak.

5.feladat Ismert csúcsok: $D=(9,-6,10)^T$, $B=(-6,-7,z)^T$
Jelölje α az ABC csúcsok síkját:
$5x-3y-4z-3=0$, normálvektor: $\mathbf{n}=(5,-3,4)^T$.
Ismert csúcsok: $D=(9,-6,10)^T$, $B=(-6,-7,z)^T$
Mivel $B\in\alpha$, ezért $z=3$, tehát $B=(-6,-7,3)^T$.

Vegyük észre, hogy $\overrightarrow{AD}$ vektor merőleges α sík két nem párhuzamos vektorára is ($\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$), emiatt merőleges α síkra is, tehát párhuzamos $\mathbf{n}$ vektorral. Ezért A-t megkapjuk, ha merőlegesen levetítjük D-t α síkra:
$A=D+k\mathbf{n}=(9+5k,-6-3k,10+4k)^T\in\alpha$, tehát kielégíti α egyenletét:
$5(9+5k)-3(-6-3k)+4(10+4k)-3=0$, amiből $k=-2$.
$A=D+k\mathbf{n}=(-1,0,2)^T$

$\overrightarrow{AB}=(-5,-7,1)^T$, $|\overrightarrow{AB}|=5\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AD}=(10,-6,8)^T$, $|\overrightarrow{AD}|=10\sqrt{2}$
$150=V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|$ mivel ez a három vektor páronként merőleges.
Ebből $|\overrightarrow{AC}|=3\sqrt{6}$ adódik. $\overrightarrow{AC}$ irányát is ismerjük, hiszen párhuzamos $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ vektorral.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -5 & -7 & 1\\ 10 & -6 & 8\end{vmatrix}$$

$=\mathbf{i}(-56+6)-\mathbf{j}(-40-10)+\mathbf{k}(30+70)=(-50,50,100)^T$
Tehát $\overrightarrow{AC}=\pm3\sqrt{6}\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|}=\pm3\sqrt{6}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T=\pm(-3,3,6)^T$.

Így C csúcsra két megoldást kapunk: $C_{1,2}=(-1,0,2)^T\pm(-3,3,6)^T$.
$C_1=(-4,3,8)^T$ és $C_2=(2,-3,-4)^T$