3. házi feladat

1.feladat. Jelölje az $ABCD$ tetraéder D csúcsából az A, B, C csúcsokhoz mutató élvektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Ekkor az ABD oldalhoz tartozó kifelé irányított területvektor pontosan $\pm\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{2}$. Feltehetjük, hogy ez a vektor épp $\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{2}$.
Ha az ellentettje lenne, akkor azzal a befelé mutató területvektorok összegéről bizonyítom be, hogy nullvektor, ami ekvivalens a feladat állításával.

Ha ABD kifelé mutató területvektora $\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{2}$, akkor a többi már egyértelmű:
Az BCD-hez tartozó $\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{2}$, az ACD-hez tartozó $\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{2}$, az ABC-hez tartozó pedig $\frac{(\mathbf{c}-\mathbf{a})\times(\mathbf{b}-\mathbf{a})}{2}$. Ezen négy vektor összege pedig valóban nullvektor tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok esetén.

Analóg állítás igaz tetszőleges poliéderre is:
Tetszőleges poliéder lapjaihoz tartozó kifelé irányított területvektorok összege nullvektor.
Biz:
Vegyünk egy tetszőleges konvex poliédert, majd minden lapját háromszögeljük további élek berajzolásával a lapokon.
Ezután vegyünk fel egy tetszőleges P belső pontját a poliédernek, és kössük össze ezt a P pontot a poliéderünk összes csúcsával.

Ezzel az eljárással tetraéderekre daraboltuk a poliéderünket, melyek egymással csak teljes lapfelületekkel érintkezhetnek. Vegyük észre, hogy a keletkezett tetraéderek lapjaihoz tartozó kifelé irányított területvektorok összege megegyezik az eredeti poliéder lapjaihoz tartozó kifelé irányított területvektorok összegével.
Mivel tetraéderekre már beláttuk az állítást, így ezzel a darabolással kész van a bizonyítás tetszőleges konvex poliéderre is.
Nem konvex poliédereket könnyen fel lehet darabolni konvex poliéderekre úgy, hogy a darabok csak teljes lapfelületekkel érintkezhetnek, ami alapján az állítás igaz marad akkor is, ha a poliéder nem konvex.

2.feladat. Legyen X, Y tetszőleges pontok e egyenesen, melyek távolsága a. $AXYB$ törtvonal hosszát jelölje d.
B pontot toljuk el e egyenessel párhuzamosan a távolsággal $\overrightarrow{B_0A_0}$ irányba, ahol B_0, és A_0 pontok az eredeti A, B pontok merőleges vetületei e-re.
Ha ez a két vetület egybeesne, akkor szimmetria miatt mindegy melyik irányát választjuk az egyenesnek.
Ekkor $\overline{YB} = \overline{XD}$. Tehát $d = \overline{AX} + \overline{XY} + \overline{YB} = \overline{AX} + a + \overline{XD}$.
Tehát d akkor lesz minimális, ha az AXD törtvonal hossza minimális, ami nyilván akkor teljesül, ha ez a három csúcs egy egyenesre esik.
Mivel D szerkeszthető, ezért X adódik, mint AD szakasz és e egyenes metszéspontja. X ismeretében Y-t megkapjuk, ha felmérünk a távolságot e egyenesen X-ből $\overrightarrow{A_0B_0}$ irányba.

3.feladat. **1. megoldás**

Helyezzük el az ABC háromszöget a komplex számsíkon úgy, hogy A csúcs legyen az origóban, továbbá tegyük fel, hogy ABC az óramutató járásával megegyező (negatív) körüljárása a háromszögnek.
Ezt nyilván feltehetem, hiszem az egész ábrát tükrözve nem változik a feladat állításának helyessége.

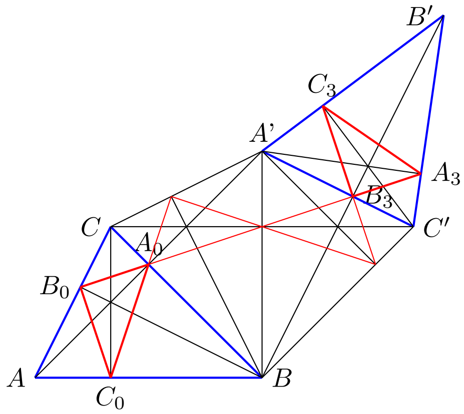
F jelölje AB oldal felezőpontját. Ekkor az összes megadott pont számítható B és C csúcsokat paraméternek tekintve: *felhasználjuk, hogy a komplex számsíkon i-vel való szorzás egy* 90 *fokos forgatásnak felel meg*
$Q = -iC$, $P = C - iC$, $R = B + i(C - B)$, $S = C + i(C - B)$, $F = \frac{1}{2}B$
$\overrightarrow{FC} = C - F = C - \frac{1}{2}B$
$\overrightarrow{PS} = S - P = C + i(C - B) - C + iC = i(2C - B)$
Tehát $\overrightarrow{PS} = 2i\overrightarrow{FC}$. Ezzel beláttuk, hogy PS kétszer akkor, mint a C-hez tartozó súlyvonal. Sőt még azt is beláttuk, hogy merőleges is rá.
Hasonlóan egyszerűen adódik a másik állítás is:
$\overrightarrow{BP} = P - B = C - B - iC$
$\overrightarrow{AS} = S = C + i(C - B)$
Tehát $\overrightarrow{AS} = i\overrightarrow{BP}$, ami igazolja az állítást, hogy ez a két szakasz egyenlő nagyságú, és merőleges egymásra.

2.megoldás

Legyen AB szakasz felezéspontja F és C tükörképét F-re vonatkozólag jelölje C_1. CPQ háromszög egybevágó ACC_1 háromszöggel hiszen két megfelelő oldaluk ($AC = CP$, $CS = AC_1 = CB$) egyenlő, valamint a közbezárt szögük a merőleges szárú szögek tétele miatt szintés megegyezik. Tehát egybevágók, amiből következik a tétel, hiszen $CC_1 = 2AF = PS$.

A feladat másik állítása hasonlóan következik, hiszen CAS és CPB háromszögek egybevágók, mert egymásból egy C körüli 90 fokos forgatással keletkeznek.

4.feladat. **1.megoldás** Tükrözöm az egész ABC háromszöget AC, AB majd BC egyenesekre. Az kapott háromszöget jelölje $A'B'C'$.
Az ábrára csak az utolsó tükrözést rajzoltam le, mert a többit nem használjuk semmire:



Mivel ABC hegyesszögű háromszög volt, ezért a magasságpontja éppen a talp-

ponti háromszögének ($A_0B_0C_0$) beírt körének középpontja. Tehát az eredeti magasságvonalak szögfelezők a talpponti háromszögben. Mivel a talpponti háromszög szögfelezője merőleges a tükrözés tengelyére, ezért a 2 oldalegyenese egymásba megy át a tükrözés során. Ebből azonnal következik (ahogy az a rajzon is látható), hogy B_0, A_0, B_3, A_3 mind egy egyenesen vannak.
Jelölje ezt az egyenest e. *(Ezzel a feladat b része készen van.)*

M éppen $A_0B_0C_0$ beírt körének középpontja, M_3 pedig $A_3B_3C_3$ beírt körének középpontja.
Vegyük észre, hogy mivel $A_0B_0C_0$ és $A_3B_3C_3$ háromszögek hasonlóak, és hasonló oldaluk illeszkedik az e egyenesre (A_0B_0 és A_3B_3), ezért M és $M3$ egyenlő távolságra vannak e egyenestől, annak két különböző partján. Ebből a tényből pedig már azonnal következik, hogy MM_3 szakasz felezőpontja illeszkedik e egyenesre, ami éppen a feladat a részének állítása volt.

2.megoldás

Az $ACAB, BC$ egyenesekre vonatkozó tükrözések egymásutánja egy csúsztatva tükrözés amelynek tengelye éppe az A_0B_0 egyenes. Ebből már a feladat állításai következnek.

5.feladat. Tegyük fel, hogy ABC egy pozitív körbejárása a háromszögnek.
Ekkor A csúcsot B_1 körül elforgatva 90 fokkal, majd az eredményt (ami C) elforgatva A_1 körül 60 fokkal az eredmény B csúcs lesz.
Egy 60 és egy 90 fokos forgatás kompozíciója felírható egyetlen 150 fokos forgatásként egy egyértelműen meghatározható P pont körül.

Ezt a P pontot könnyen kiszerkeszthetjük, hiszen az A_1B_1P háromszögből két csúcs helye adott, továbbá ismerjük ezen két csúcsnál lévő szögeket: B_1-nél lévő szög 45 fokos, A_1-nél lévő szög 30 fokos.

Ezen P körüli 150 fokos forgatás A csúcsot B csúcsba viszi át, tehát ABP háromszög egyenlőszárú, és 150 fokos csúcsszögű háromszög.

Innen már A és B csúcsok kiszerkeszthetők, hiszen AC_1P és BC_1P háromszögeknek ismert már 2 csúcsa, és az összes szöge: C_1-nél 15 fok, P-nél 105 fok, A-nál és B-nél lévő szögek pedig 60 fokosak. *60, 105, 15 szerkeszthető szögek*

A és B csúcsok ismeretében C csúcs szerkesztése már triviális. Például A csúcsot elforgatom B_1 körül 90 fokkal.

Megjegyzés: Ha tekintjül a $C_1^{-30^\circ} \circ A_1^{60^\circ} \circ B_1^{120^\circ}$ transzformációt, akkor ha megszerkeszthető a háromszög, akkor A ennek fixpontja. Ezzel a módszerrel is megkaphatjuk a háromszög csúcsait.

A feladat megoldásához hozzátartozik a diszkusszió is.