4. házi feladat

A feladatok begoldása során felhasználjuk a következőket:

$$\mathbf{C_n} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C_n^2} = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix}$$

Ha adott egy s sík, és ennek egy $\mathbf{n} = (a,b,c)^T$ normálvektora, akkor a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{n}$ körüli α szögű elforgatottja, illetve ennek az s síkra való tükrözése: $\mathbf{v}_{1,2} = (C_n^2(-cos\alpha \pm 1) + C_n(-sin\alpha) \pm 1)\mathbf{v}$

1.feladat **1** Az [x,z] sík z=x egyenese körüli félfordulat egy origót fixen hagyó transzformáció, ahol $\mathbf{n}$=$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ és α=180.
A keresett mátrix a $(1-cos\alpha)C_n^2 - C_n sin\alpha + 1 = 2C_n^2 + 1 = T_1$ felírásból adódik.

$$\mathbf{C_n^2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

, így

$$\mathbf{T_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Az [y,z] sík y+z=1 egyenese körüli félfordulatot a következőképpen írhatjuk fel:
$a = 0, b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha = 180$ és $(1-cos\alpha)C_n^2 - C_n sin\alpha + 1 = 2C_n^2 + 1 = T_2^*$
Behelyettesítve a megadott paramétereket megkapható a T_2^* mátrix.

$$\mathbf{T_2^*} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Az eltolási rész az (1-T_2^*)P felírásból adódik, ahol P egy fixpont, vagyis egy tetszőleges pontja az egyenesnek. Legyen P=$(0,1,0)^T$. Ekkor az eltolási rész $(0,1,1)^T$, és így már felírható a homogénkoordinátás alak is:

$$\mathbf{T_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A T_1 és T_2 transzformációk egymás utáni alkalmazása felírható a két mátrix szorzataként, vagyis $T = T_2 T_1$.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.feladat A kocka csúcsai: $A_1 = (0,0,0)^T$, $B_1 = (1,0,0)^T$, $C_1 = (1,1,0)^T$, $D_1 = (0,1,0)^T$, $A_2 = (0,0,1)^T$, $B_2 = (1,0,1)^T$, $C_2 = (1,1,1)^T$, $D_2 = (0,1,1)^T$. Egy $P = (x,y,z)^T$ pont T homogénkoordinátás mátrix által meghatározott transzformáció általi $P' = (x',y',z')^T$ képe a következőképpen határozható meg: $(x',y',z',1)^T = T(x,y,z,1)^T$.
Így a csúcsok képei: $A_1' = (0,1,1)^T, B_1' = (0,0,1)^T, C_1' = (0,0,2)^T, D_1' = (0,1,2)^T, A_2' = (-1,1,1)^T, B_2' = (-1,0,1)^T, C_2' = (-1,0,2)^T, D_2' = (-1,1,2)^T$

T_1 és T_2 transzformációk egyenes körüli félfordulatok voltak. Mivel az ilyen transzformációk önmagukba viszik át az olyan egyeneseket, melyeknek van a forgatás egyenesével közös pontjuk, és merőleges rá, ezért elég találni egy olyan egyenest, mely mindkét forgatás egyenesére merőleges és van velük közös pontja. *(Ez épp a két kitérő egyenes normáltranszverzálisának egyenese.)*
Kell tehát olyan egyenes, melynek van
T_1 egyenese e_1: $(t,0,t)^T$, normálvektora: $\mathbf{n_1} = (1,0,1)^T$
T_2 egyenese e_2: $(0,a,1-a)^T$, normálvektora: $\mathbf{n_2} = (0,1,-1)^T$
A keresett e_3 egyenes irányvektora tehát $\mathbf{n_3} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = (-1,1,1)^T$
e_3 egyenesnek van közös pontja e_1 és e_2 egyenesekkel, tehát van olyan t,k,a valós számok, melyekre:
$(t,0,t)^T + (-k,k,k)^T = (0,a,1-a)$, ahonnan $t = k = a = \frac{1}{3}$ adódik.
Tehát a keresett egyenes e_3: $(-k+\frac{1}{3}, k, k+\frac{1}{3})^T$

3.feladat $A = (1,0,0)^T$, $B = (1,1,1)^T$, $\mathbf{n}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$
$\mathbf{n}_{AB}$ körüli félfordulat mátrixa:

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{C_n^2} + \mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A nyilán fixpont, tehát az eltolási rész: $\mathbf{a} = (\mathbf{1} - \mathbf{R})A = (2,0,0)^T$, tehát:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S sík egyenlete $y + z = 2$ tehát $\mathbf{n}_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$
S síkra tükrözés mátrixa:

$$\mathbf{M} = -2\mathbf{C_n^2} - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(0,0,2)^T \in S$ egy fixpont, tehát az eltolási rész:
$\mathbf{b} = (\mathbf{1} - \mathbf{M})(0,0,2)^T = (0,2,2)^T$, tehát:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A két transzformáció kompozíciójának homogénkoordinátás mátrixa tehát:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}$. Egy pont, és képe közötti kapcsolat: $\mathbf{T}(x, y, z, 1)^T = (x', y', z', 1)^T$ tehát $(x, y, z, 1)^T = \mathbf{T}^{-1}(x', y', z', 1)^T$
Ebből a következők adódnak: $x = 2 - x'$, $y = 2 - y'$, $z = 2 - z'$
Visszahelyettesítve megkapjuk a hiperboloid egyenletét a transzformáció után:

$$\frac{(2 - x')^2}{4} + \frac{(2 - y')^2}{4} - (2 - z')^2 = 1$$

4.feladat Egy forgatva tükrözés mátrixát kell felírni, ahol $\alpha = 60$ a forgatás szöge, tengelye párhuzamos az $(1, 1, -1)^T$ vektorral, fixpontja pedig a P=$(-1, 1 - 1)^T$ pont. Ekkor $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$

A keresett mátrix: $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{n},\alpha} = -(1 + \cos\alpha)\mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{2} - \sin\alpha\mathbf{C}_\mathbf{n} - \mathbf{1}$.

Behelyettesítve az a,b,c,α értékeket a következő mátrixot kapjuk:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eltolási része: $(\mathbf{1} - \mathbf{A})P$, ahol P a fixpont. $(\mathbf{1} - \mathbf{A})P = (0, 0, -2)^T$. Így a homogénkoordinátás alak:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A kocka csúcsai: $A_1 = (0, 0, 0)^T$, $B_1 = (-2, 0, 0)^T$, $C_1 = (-2, 2, 0)^T$, $D_1 = (0, 2, 0)^T$, $A_2 = (0, 0, -2)^T$, $B_2 = (-2, 0, -2)^T$, $C_2 = (-2, 2, -2)^T$, $D_2 = (0, 2, -2)^T$.
Egy $P = (x, y, z)^T$ pont T homogénkoordinátás mátrix által meghatározott transzformáció általi $P' = (x', y', z')^T$ képe a következőképpen határozható meg: $(x', y', z', 1)^T = T(x, y, z, 1)^T$.
Így a csúcsok képei: $A_1' = (0, 0, -2)^T, B_1' = (0, 2, -2)^T, C_1' = (0, 2, 0)^T, D_1' = (0, 0, 0)^T, A_2' = (-2, 0, -2)^T, B_2' = (-2, 2, -2)^T, C_2' = (-2, 2, 0)^T, D_2' = (-2, 0, 0)^T$

Tehát ezt a kockát a transzformáció önmagára képezi. (nem pontonként)
Ezt akár számolás nélkül is lehet látni, hiszen a transzformáció egy olyan forgatvatükrözés, melynek fixpontja a kocka középpontja, és tengelye az egyik testátló.

5.feladat **1.rész** x+y=1 síkra tükrözés $= T_1$

$$\mathbf{T_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.rész x-y=0 síkra tükrözés $= T_2$, $\mathbf{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$

$$\mathbf{T_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.rész z tengely körüli 90 fokos forgatás $= T_3$

$$\mathbf{T_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.rész Az $(1, -1, 0)^T$ vektorral való eltolás $= T_4$

$$\mathbf{T_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát az eredő transzfromáció mátrixa:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T_4 T_3 T_2 T_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(x, y, z, 1)^T = \mathbf{T}^{-1}(x', y', z', 1)^T$, ahol $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$, hiszen $\mathbf{T}$ ortogonális. Innen $x = -y'$, $y = x'$, $z = z'$ adódik, amit visszahelyettesítve megkapjuk az elliptikus paraboloid transzformáció után adódó képének egyenletét:

$$(-4y' - 1)^2 + 9(x' - 2)^2 = 72z'$$

Gyorsabb megoldás Ha észrevesszük, hogy mind a 4 transzformáció az egész $\alpha = [x, y]$ síkot önmagába képezi (nem pontonként), akkor síkban könnyű átlátni ezen transzformációk kompozícióját:
Tehát az egészet α síkban nézve: $x + y = 1$ és $x - y = 0$ egyenesek egymásra merőlegesek, metszéspontjuk $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, tehát ezek kompozíciója épp $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ pont körüli 180 fokos forgatás.
$\mathbf{T_3}$ egy origó körüli 90 fokos forgatásnak felel meg ha csak α síkot nézzük. Ezek alapján $\mathbf{T_3 T_2 T_1}$ egy 180 illetve egy 90 fokos forgatás kompozíciója, ami egy -90 fokos forgatásnak felel meg $(0, 1)^T$ pont körül. Ez a forgatás az origót épp $(-1, 1)^T$ pontba viszi, tehát $\mathbf{T_4}$ éppen "visszatolja" az origót a helyére.

Tehát $\mathbf{T} = \mathbf{T_4 T_3 T_2 T_1}$ transzformáció éppen a z tengely körüli -90 fokos forgatás.