# 5. házi feladat

**1.feladat.** Adottak az ABC háromszög $a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{3}, c = \frac{2\pi}{3}$ oldalai, illetve az $AC_1 = \frac{\pi}{4}, CA_1 = \frac{\pi}{3}$, amikből $C_1B = c - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}, A_1B = b - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Az $AA_1, CC_1$ főkörívek metszéspontja P, keressük a $PB$ főkörív hosszát, illetve a $CC_1A_1\sphericalangle$ szöget.

Az $ABA_1$ háromszögből és a koszinusztételből meghatározható:
$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\beta)$, amiből $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
$\cos(AA_1) = \cos(c)\cos(A_1B) + \sin(c)\sin(A_1B)\cos(\beta) = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3})$, amiből $AA_1 = 1,7548 = 100°32'43"$
$\cos(A_1B) = \cos(AA_1)\cos(c) + \sin(AA_1)\sin(c)\cos(A_1AB\sphericalangle)$, innen:
$\cos(A_1AB\sphericalangle) = 0.9095$, amiből $A_1AB\sphericalangle = 0,4287 = 24°33'49"$

A $CC_1B$ háromszögből, a koszinusztétel felhasználásával:
$\cos(CC_1) = \cos(C_1B)\cos(a) + \sin(C_1B)\sin(a)\cos(\beta) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$, amiből $CC_1 = 0,9792 = 56°6'16"$,
$\cos(a) = \cos(CC_1)\cos(C_1B) + \sin(CC_1)\sin(C_1B)\cos(CC_1B\sphericalangle)$, amiből $CC_1B\sphericalangle = 1,7518 = 100°22'16"$

Ebből már megkapjuk a $CC_1A$ szöget, $CC_1A\sphericalangle = 180° - CC_1B\sphericalangle = 1,3898 = 79°37'44"$.

$C_1A_1B$ háromszögből meghatározható $A_1C_1$:
$\cos(A_1C_1) = \cos(A_1B)\cos(C_1B) + \sin(A_1B)\sin(C_1B)\cos\beta = 0,5030$
Innen: $A_1C_1 = 1,0438 = 59°48'9"$

Így már ismerem a $CC_1A_1$ háromszög minden oldalát, tehát a keresett $CC_1A_1\sphericalangle$ szög egy koszinusztétellel számítható:
$\cos(CA_1) = \cos(CC_1)\cos(C_1A_1) + \sin(CC_1)\sin(C_1A_1)\cos(CC_1A_1\sphericalangle)$
Innen $\cos(CC_1A_1\sphericalangle) = 0,3060$, tehát:
$CC_1A_1\sphericalangle = 1,2599 = 72°11'4"$

Az $AC_1P$ háromszögből, a szögekre vonatkozó koszinusztétel felhasználásával:
$\cos(APC_1\sphericalangle) = -\cos(A_1AB)\cos(CC_1A) + \sin(A_1AB)\sin(CC_1A)\cos(AC_1) = 0.1254$, amiből $APC_1\sphericalangle = 1,4451 = 82°47'43"$
szinusztétellel:
$\frac{\sin(AC_1)}{\sin(PC_1)} = \frac{\sin(APC_1\sphericalangle)}{\sin(A_1AB\sphericalangle)}$, amiből $PC_1 = 0,3008 = 17°14'5"$

A $PC_1B$ háromszögből pedig:
$\cos(PB) = \cos(PC_1)\cos(C_1B) + \sin(PC_1)\sin(C_1B)\cos(PC_1B\sphericalangle) = 0,1957$.
Tehát $PB = 1,3738 = 78°42'57"$.

**2.feladat.** Adottak: $c = 74°46'$, $b = 118°52'7"$, $\beta + \gamma = 228°40'36" := \omega$

Szinusz tétel alapján: $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin b}{\sin c} = 0,9076 := x$
Másrészt: $\sin\beta = \sin(\omega - \gamma)$, tehát:

$x \sin\gamma = \sin(\omega - \gamma) = \sin\omega\cos\gamma - \cos\omega\sin\gamma$
$\sin\omega\cos\gamma = (\cos\omega - x)\sin\gamma$, tehát: $-0,751\cos\gamma = 0,2473\sin\gamma$
Előző sort négyzetre emelve:
*A keletkező hamis gyököt ellenőrzéssel ki lehet majd szűrni.*
$0,564\cos^2\gamma = 0.061\sin^2\gamma = 0.061(1-\cos^2\gamma)$
$\cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{0,061}{0,564+0,061}} = \pm 0,3124$

Ellenőrzéssel könnyen látható, hogy a $\cos\gamma = -0,3124$ megoldásból adódó szögek: $\gamma = 108°12'14"$, $\beta = 120°28'22"$ jó megoldást adnak, míg a másikak nem.

Mivel most már ismert két szög, és két oldal innen az utolsó szög és oldal könnyen számítható:
$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha = -0,1269 + 0,8450\cos\alpha$
$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a = -0,1584 + 0,8187\cos a$
Ebből a két egyenletből adódik, hogy: $\cos\alpha = -0,8511, \cos a = -0,8460$.
Tehát a háromszög szögei, és oldalai:
$a = 147°46'45"$, $b = 118°52'7"$, $c = 74°46'$
$\alpha = 148°19'59"$, $\beta = 120°28'22"$, $\gamma = 108°12'14"$

**3.feladat.** Keressük az $AA_1$ főkörív hosszát. Ehhez elég az $ABA_1$ háromszög $AA_1$ oldalára alkalmazni gömbi koszinusztételt, mivel ismerjük a $c = AB$, $BA_1$ oldalakat, az $ABA_1 = \pi - \beta$ pedig könnyen kiszámolható.

$\beta$ meghatározásához írjuk fel a háromszög $b$ oldalára vonatkozó koszinusztételt:
$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\beta)$, amiből $\beta = 45°$, tehát az $ABA_1$ szög $135°$.

Az $AA_1$ oldalra vonatkozó koszinusztétel:
$\cos(AA_1) = \cos(c)\cos(\frac{\pi}{3}) + \sin(c)\sin(\frac{\pi}{3})\cos(135°) = -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2}$, amiből $AA_1 = 2,2298 = 127,8°$ a keresett hossz.

**4.feladat.** Legyen a gömb sugara: $r = 1$.
Egy gömbháromszög területe: $T_\triangle = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$, tehát $1{=}3\alpha - \pi$, amiből $\alpha = 1,3805$.
Egy csúcs köré írt kör területének az $\frac{\alpha}{2\pi}$-ad része esik a háromszögbe, így a körökön kívül eső részek területe: $T = 1 - 3\frac{\alpha}{2pi} = 0.340846$.

**5.feladat.** Adottak: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$
Koszinusztételből az oldalak könnyen számíthatók:
$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos c = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$a = 0,6155$, $b = \frac{\pi}{4}$, $c = 0,9553$

Jelölje a keresett kör középpontját $P$.
Mivel $P$ érinti $AB$ és $AC$ oldalakat, ezért $P$ rajta van a $BAC\sphericalangle$ szögfelezőn.

Koszinusz tételt felírva $PCA$ háromszögre:
$\cos(APC\sphericalangle) = -\cos\gamma\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\gamma\sin\frac{\alpha}{2}\cos b = 0,2706$. Tehát $APC\sphericalangle = 1,2968$.
Innen Szinusztételből adódik $PC$ ív hossza:

$$\sin(PC) = \sin b \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(APC\sphericalangle)} = 0,2811$$

Tehát $PC = 0,2849$ adódik, és ez épp a keresett kör sugarának képe a gömb felszínén.

A kör euklideszi sugarát innen már egyszerű kiszámolni, hiszen az $OPC$ euklideszi háromszögben ismerjük $OP = OC = 1$ oldalak hosszát, és $POC\sphericalangle = 0,2849$ közrezárt szöget.
$\frac{r}{2} = \sin(\frac{POC\sphericalangle}{2}) = 0,1420$, tehát a keresett kör sugara: $r = 0,284$