6. házi feladat

1.feladat. Adottak: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$
Oldalak számíthatók: $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, $c = \frac{\pi}{4}$, továbbá $CD = \frac{\pi}{6}$, $DA = \frac{\pi}{3}$

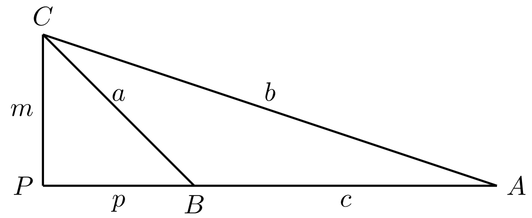
Tükrözzük A és D pontokat BC gömbi egyenesre. Az így keletkező pontokat jelölje A' és D'. Valamint a keresett legrövidebb út azon pontját, ahol érintjük BC egyenest jelölje P, a keresett Út hosszát pedig $s = AP + PD$.

Ekkor $PD = PD'$, tehát $s = AP + PD'$, ez az érték nyilván akkor lesz minimális, ha A, P, D' pontok egy gömbi egyenesre esnek, vagyis $s = AD'$.

Tehát elég $AA'D'$ háromszöget vizsgálni:
Ismerjük: $AA' = 2AB = \frac{\pi}{2}$, $AD' = AD = \frac{\pi}{3}$, $AA'D'\sphericalangle = \alpha = \frac{\pi}{2}$
Keressük: Indulási irányt, és az út hosszát, tehát $A'AD'\sphericalangle$ és AD'.
$\cos(AD') = \cos(AA')\cos(A'D') + \sin(AA')\sin(A'D')\cos(AA'D'\sphericalangle) = 0$
$\sin(A'AD'\sphericalangle) = sin(AA'D'\sphericalangle)\frac{\sin(A'D')}{\sin(AD')} = \sin(A'D') = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tehát $AD' = \frac{\pi}{2}$ és $A'AD'\sphericalangle = \frac{\pi}{3}$.

2.feladat. Jelölje P azt a pontját AB főkörívnek, mely legközelebb van C-hez. Tehát $PC = \frac{\pi}{6}$. Jelölje továbbá BP ív hosszát p, PC hosszát m. Továbbá az ABC háromszög szögeit szokás szerint α, β, γ, oldalait: a, b, c
Ha $P = B$ lenne, akkor $CPA\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$, $BA = \frac{\pi}{3}$, $CP = \frac{\pi}{6}$ adatokkal koszinusztétel alapján $\gamma = 67°22'48"$ adódna, ami jóval több, mint a feladatban előírt, emiatt lehet tudni, hogy P pont nem eshet az AB szakaszon belülre.
Tehát az ábra így néz ki:



Ismert adatok: $m = \frac{\pi}{6}$, $c = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Keressük: a, b, α, γ
Fejezzünk ki mindent p paraméterrel:

Koszinusztétel PBC-re:
$\cos a = \cos m \cos p = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos p$

Koszinusztétel PAC-re:
$\cos b = \cos m \cos(p + c) = \cos m(\cos p \cos c - \sin p \sin c) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2}\cos p - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin p)$
$\cos b = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos p - \frac{3}{4}\sin p$

Szinusztétel ABC-re:
$\sin a = \sin c \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin\alpha$

Szinusztétel APC-re:

$\sin b = \sin m \frac{\sin 90°}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha}$

Ezek segítségével ki lehet fejezni p-t ABC-re felírt koszinusztételből:
$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$
$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos p(\frac{\sqrt{3}}{4}\cos p - \frac{3}{4}\sin p) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin\alpha\frac{1}{2\sin\alpha}\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\cos^2 p - \frac{3\sqrt{3}}{8}\cos p \sin p + \frac{\sqrt{3}}{4}$
Ezt az egyenletet szorozzuk be 16-al, majd alkalmazzuk az addíciós tételeket: $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$, és $2\sin x \cos x = \sin(2x)$

$8 = 6\cos^2 p - 6\sqrt{3}\cos p \sin p + 4\sqrt{3}$
$8 - 4\sqrt{3} = 3 + 3\cos(2p) - 3\sqrt{3}\sin(2p)$
$5 - 4\sqrt{3} = 3\cos(2p) - 3\sqrt{3}\sin(2p)$
Itt egy osztás után újra lehet addíciós tételt alkalmazni:
$\frac{5-4\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2}\cos(2p) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2p) = \sin\frac{\pi}{6}\cos(2p) - \cos\frac{\pi}{6}\sin(2p) = \sin(\frac{\pi}{6} - 2p)$

Innen két különböző megoldás adódik p-re:

Első megoldás: $\frac{\pi}{6} - 2p = -18°44'44"$, tehát $p = 24°22'22"$ visszahelyettesítve megkapjuk az oldalakat, és szögeket:
$a = 37°55'20"$, $b = 85°7'43"$, $\alpha = 30°7'12"$, $\beta = 125°33'22"$

Második megoldás: $\frac{\pi}{6} - 2p = -161°15'16"$, tehát $p = 95°37'38"$ visszahelyettesítve megkapjuk az oldalakat, és szögeket:
$a = 94°52'17"$, $b = 142°4'40"$, $\alpha = 54°26'38"$, $\beta = 149°52'48"$

3.feladat. Adatok: $R = 6380$ km
Budapest: K.h. 19°, É.sz. 47°30′
New York: Ny.h. 73°30′, É.sz. 40°15′

Jelölje Budapestet B, New Yorkot N, az északi sarkot pedig E. Ekkor a keresett távolság éppen BN ív, az érkezési, és indulási irányok pedig a háromszög szögeiből adódnak majd.
$EB = 90° - 47°30' = 42°30'$
$EN = 90° - 40°15' = 49°45'$
$NEB\sphericalangle = 73°30' + 19° = 92°30'$
$\cos(BN) = \cos(EB)\cos(EN) + \sin(EB)\sin(EN)\cos(NEB\sphericalangle) = 0,4539$
Tehát $BN = 63°0'25" = 1,0997 = 7016$ km.

Szögek innen már szinusz tétellel gyorsan számíthatók:
$\sin(ENB\sphericalangle) = \sin(NEB\sphericalangle)\frac{\sin(EB)}{\sin(NB)} = 0,7575$
Tehát $ENB\sphericalangle = 49°14'28" = 0,8594$.
$\sin(EBN\sphericalangle) = \sin(NEB\sphericalangle)\frac{\sin(EN)}{\sin(NB)} = 0,8557$
Tehát $EBN\sphericalangle = 58°50'25" = 1,027$.

Legészakibb pontot jelölje P. Ekkor vizsgáljuk meg BEP háromszöget:
$BPE\sphericalangle = 90°$, $EBP\sphericalangle = EBN\sphericalangle = 58°50'25"$
$\sin(EP) = \sin(EB)\frac{\sin(EBP\sphericalangle)}{\sin(EPB\sphericalangle)} = 0,5781$, tehát $EP = 35°19'7"$
$90° - 35°19'7" = 54°40'53"$ Ebből P szélességi koordinátája: É.sz. $54°40'53"$

$0 = \cos(EPB\sphericalangle) = -\cos(EBP\sphericalangle)\cos(BEP\sphericalangle) + \sin(EBP\sphericalangle)\sin(BEP\sphericalangle)\cos(EB)$
$0,5174\cos(BEP\sphericalangle) = 0,6309\sin(BEP\sphericalangle)$
$\tan(BEP\sphericalangle) = 0,8201$, tehát $BEP\sphericalangle = 39°21'17"$
$19° - 39°21'17" = -20°21'17"$ Ebből P hosszúsági koordinátája: Ny.h. $20°21'17"$.

4.feladat. Adatok: $R = 6380$ km
Budapest: K.h. $36°42'$, É.sz. $47°29'$
Déva: K.h. $40°36'$, É.sz. $45°52'$
hosszúságok régi rendszerben vannak megadva

Jelölje Budapestet B, Dévát D, az északi sarkot pedig E. Ekkor a keresett távolság éppen BD ív, melyet EBD háromszögből egyetlen koszinusztétellel meg lehet kapni:
$EB = 90° - 47°29' = 42°31'$
$ED = 90° - 45°52' = 44°8'$
$BED\sphericalangle = 40°36' - 36°42' = 3°54'$
$\cos(BD) = \cos(EB)\cos(ED) + \sin(EB)\sin(ED)\cos(BED\sphericalangle) = 0,9985$
Tehát $BD = 3°7'33" = 0,0546 = 348$ km.

5.feladat. Tekintsünk egy tetszőleges csúcsot P. Az ezen csúcsot tartalmazó ötszög középpontját jelölje A, a két hatszögét pedig B és C. Jelölje ABC háromszög szögeit, és oldalait $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ továbbá a beírt körök sugarát r_5 és r_6 , az ötszög körülírt sugarát R_6, az ötszög területét pedig T_5.

ABC háromszög minden szögét ismerjük: $\alpha = 72°$, $\beta = \gamma = 60°$. Innen oldalak koszinusztétellel gyorsan számíthatók: $a = 41°48'37"$, $b = c = 37°22'39"$
Vegyük észre, hogy $a = 2r_6$, és $b = r_5 + r_6$.
Tehát: $r_6 = 20°54'19"$, és $r_5 = 16°28'20" = 0,2875$.
Jelölje AB egyenes metszéspontját az oldallal Q, és legyen $\omega = APQ\sphericalangle$
Ekkor koszinusztétel APQ háromszögre:
$\cos\omega = -\cos(36°)\cos(90°) + \sin(36°)\sin(90°)\cos(r_5) = 0,5637$
Tehát $\omega = 55°41'26" = 0,972$.
$R_5 = AP$ sugár hossza innen már egy szinusztétellel adódik:
$\sin(R_5) = \frac{\sin(r_5)}{\sin\omega} = 0,3433$, tehát $R_5 = 20°4'36" = 0,3504$.

$T_5 = 10T_{APQ} = 10(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} + \omega - \pi) = 0,2951$