

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika, Mechatronika és Terméktervező BSc szakok
Matematika A1H - Gyakorló feladatsor vizsgára

Dátum: 2015. december 11.

Munkaidő: 90 perc

1.) (4 pont) Milyen tulajdonságok esetén nevezünk egy relációt *ekvivalencia-relációnak*? Mondja ki ezeknek a tulajdonságoknak a pontos definícióját is!

2.) (4 pont) Mondja ki és bizonyítsa be Darboux tételét!

3.) (5 pont) Mit nevezünk az "Integrálszámítás középértéktételének"? Tudva a Newton-Leibniz szabályt, mi köze ennek, és a differenciálszámításból ismert Lagrange-féle középértéktételnek egymáshoz?

4.) (4 pont) Vezesse le a differenciálható $g(t) = (x(t), y(t))$ görbe $[a, b]$ paraméter-intervallumhoz tartozó szakaszának ívhosszára vonatkozó integrálformulát!

5.) (5 pont) Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens, és az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről a következőket tudjuk. (i) f páros függvény; (ii) $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (azaz f differenciálható \mathbb{R} -en); (iii) $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény; (iv) $f(n) = a_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra.

a) Igaz-e, hogy ekkor az f függvény is konvergens a $+\infty$ -ben, azaz $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$?

b) És az igaz-e, hogy f korlátos függvény? Válaszait indokolja!

6.) (6 pont) Számítsa ki a határértékeket, ha léteznek, vagy igazolja, ha nem léteznek!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\arctan x}{x}\right)^{\tanh x}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n + \binom{n}{10}}{n! - n^{10}}$.

7.) (4 pont) Elemezze és ábrázolja a $h(x) := 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ függvényt!

8.) (4 pont) Tudjuk, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható függvényekre teljesül, hogy $f(0) < g(0)$ és $f(1) > g(1)$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $0 < x < 1$ pont, amelyre $f'(x) > g'(x)$!

9.) (6 pont) Tekintsük az $x(t) = 8 \cos t$, $y(t) = 6 \sin t$ ellipszis-görbét! Írjuk fel a görbe $t = \pi/3$ paraméterértékhez tartozó $E := (4; 3\sqrt{3})$ pontjában a görbe érintőjének az egyenletét!

10.) (8 pont) a) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = ?$ b) $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x} = ?$.

11.) (5 pont) Határozzuk meg annak a síkidomnak a súlypontját, amelyet a $3x = y^2$ és a $3y = x^2$ parabolaívek zárnak közre!

12.) (5 pont) Forgassuk körbe az $f(x) = x^a$ függvény $[1, \infty)$ végtelen félegyenes feletti görbét az x tengely körül, és tekintsük az így keletkező F forgástestet!

Milyen a paraméter-értékeknél lehetséges az, hogy (i) az F forgástest $V = V(F)$ térfogata véges marad (ii) de ennek ellenére a forgástest $A = A(F)$ felszíne végtelenné válik?