

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar  
Energetika, Mechatronika és Terméktervező BSc szakok  
Matematika A1H - Elővizsga feladatsor

Dátum: 2015. december 15.

Munkaidő: 90 perc

---

Hallgató neve:

Hallgató Neptun kódja:

1.) (5 pont) Sorolja fel a számtestek műveleti azonosságait (azaz a számtestek kilenc axiómáját)! Ezek alapján ellenőrizze, hogy a  $\mathbb{T} := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{r + s\sqrt{2} : r, s \in \mathbb{Q}\}$  alakú számok halmaza is számtestet alkot!

2.) (4 pont) Bizonyítsa be, hogy egy *páratlan fokú* valós polinomnak van valós gyöke!

3.) (6 pont) Mit nevezünk egy korlátos és zárt  $I := [a, b]$  intervallumon értelmezett korlátos  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvény alsó- és felső integráljának? Igazolja, hogy ezek egyenlőek, ha a függvény az  $I$ -n monoton!

4.) (4 pont) Fogalmazza meg a formális logika szerinti tagadását a következő állításoknak, ügyelve arra, hogy a megfogalmazásban már ne maradjon tagadás ("nem")!

a) "Anagnosztopoulos még nem járt egyik görög szigeten sem".

b) "Minden athéninak van olyan ismerőse, aki még nem járt egyik görög szigeten sem."

5.) (5 pont) Számítsa ki a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \operatorname{th} x)^{\operatorname{ctg} x}$  határértéket, vagy igazolja, ha nem létezik!

6.) (5 pont) Legyen  $f \in C(I)$  folytonos függvény az  $I = (0, 1)$  *nyílt* intervallumon, és tegyük fel, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ . Határozzuk meg a  $g(x) := \sin f(x)$  kompozíció-függvény torlódási pontjainak halmazát  $x \rightarrow +0$ -ra!

7.) (6 pont) Igaz-e a következő állítás: "Ha egy  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex függvénynek a  $+\infty$ -ben létezik (véges) határértéke, akkor monoton csökkenő" ?

8.) (4 pont) Keressük meg az összes olyan pontot a  $q(t) := (t^2, e^t - et)$  ( $t > 0$ ) görbén, ahol a görbe érintője vízszintes!

9.) (6 pont) Keresse meg a következő határozatlan integrált!  $\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2} = ?$

10.) (4 pont) Az  $r$  sugarú csavarvonal egyenlete a térben  $(r \cos t, r \sin t, at)$ , ahol  $a$  a menet-emelkedési paraméter. Számítsuk ki egy csavarmenet (azaz a csavarvonal egy körbefordulását kitevő  $0 \leq t \leq 2\pi$  szakasz) ívhosszát az  $r$  és  $a$  paraméter-értékek függvényében!

11.) (6 pont) Számítsuk ki az origó középpontal megrajzolt  $R$  sugarú körlapból a pozitív síknegyedbe eső negyed-körlap a) területét b) súlypontjának koordinátáit!

12.) (5 pont) Milyen  $p \in \mathbb{R}$  esetén konvergens az  $\int_0^1 x^p dx$  improprius Riemann-integrál?