Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika, Mechatronika és Terméktervező BSc szakok

Matematika A1H - Írásbeli vizsga H feladatsor

Dátum: 2015. január Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

1.) (5 pont) Fogalmazza meg és bizonyítsa is be egy $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ komplex számsorozatra vonatkozóan a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot!

2.) (7 pont) Mit jelent az, hogy egy f függvénynek az $(a, f(a))$ pontban (ahol $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$) egy $L(x) = mx+c$ egyenes (i) az f függvény *érintője*? (ii) az f függvény *alsó támaszegyenese*?
a) Melyikből lehet akár több is?
b) Mondjon példákat olyan függvényekre, amelyeknél az egyik létezik, a másik nem!
c) Mi a kapcsolat közöttük, ha mindkettő létezik?

3.) (5 pont) A Riemann-integrál alaptulajdonságai között ötödikként szerepelt az ún. "minimum-maximum korlátozás". Fogalmazza meg és bizonyítsa is be ezt a tulajdonságot!

4.) (4 pont) Oldja meg $z \in \mathbb{C}$-re a $z^2+2z+3 = \dfrac{2(1+\overline{z}\,\mathbf{Re}\, z) - z - |z|^2 - \overline{z}^2}{z-2}$ egyenletet!

5.) (4 pont) Szüntesse meg a $\lambda(x) := \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ függvény szakadását!

6.) (4 pont) Egy f függvényt *lényegében páratlannak* nevezünk, ha $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(-x)}{f(x)} = -1$.
a) Igazoljuk, hogy ha egy $f \in C(\mathbb{R})$ függvény lényegében páratlan, akkor van gyöke is (azaz olyan $r \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $f(r) = 0$)!
b) A valós polinomok közül melyek lesznek lényegében páratlan függvények?

7.) (6 pont) Tegyük fel, hogy az $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex, és $F(0) = -2$. Bizonyítsuk be, hogy ha F valahol felveszi a -1 értéket is, akkor van gyöke is!

8.) (6 pont) Keresse meg az $\displaystyle\int \frac{e^x + 2 + 3e^{-x}}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx$ primitív függvényt!

9.) (5 pont) Tekintsük a $[0, \pi/3]$ szakaszon a $h(x) := \ln(\cos x)$ függvénygörbét, és számítsuk ki az ívhosszát!

10.) (4 pont) Vegyük a $\operatorname{ch} x$ függvényt $0 \le x \le 1$-re, és forgassuk körül az y tengely körül. Számítsuk ki a körbeforgatás során súrolt H felület $A := A(H)$ felszínét!

11.) (5 pont) Határozza meg annak a Q síkidomnak a súlypontját, amely az $y = \cos x$ görbe $0 \le x \le \pi/2$ szakasz feletti íve és az x tengely ezen szakasza között fekszik!

12.) (5 pont) Milyen $a \in \mathbb{R}$ paraméter-értékek esetén lesz konvergens az $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^a x}\, dx$ improprius Riemann-integrál?

Matematika A1H – H feladatsor – Megoldások

1.) (5 pont) Cauchy-kritérium: A $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy ha $m, n \geq N$, akkor $|z_m - z_n| < \varepsilon$ (2).

Két irányt kell igazoljunk. Konvergens $\Rightarrow$ Cauchy: ha $z_n \to z$, akkor $\varepsilon^* := \varepsilon/2$-höz is $\exists N = N(\varepsilon/2)$, amelyre $|z_n - z| < \varepsilon^* = \varepsilon/2$ ill. $|z_m - z| < \varepsilon^* = \varepsilon/2$ minden $m, n > N$-re: így $|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m| < \varepsilon$ is teljesül $\forall m, n > N$ (1).

Megfordítva, legyen most (z_n) Cauchy. Akkor nyilván korlátos is, és a Bolzano–Weierstrass-tétel értelmében kell legyen konvergens részsorozata, azaz $\exists (z_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset (z_n)_{n=1}^{\infty}$ részsorozat, hogy $z_{n_k} \to z$ $(k \to \infty)$ (1).

Válasszunk $\varepsilon' := \varepsilon/2$-höz N'-t a Cauchy tulajdonság szerint, és N"-t, amelyre ha $k_n > N$", akkor már $|z_{n_k} - z| < \varepsilon/2$. Így minden $n > N := \max(N', N")$ és hozzá tetsz. $n_k > N$" esetén $|z_n - z| \leq |z_n - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, tehát $z_n \to z$ $(n \to \infty)$ (1).

2.) (7 pont) (i) $L(x)$ érintő, ha $L(a) = f(a)$ (azaz $c = f(a) - ma$), ami azt jelenti, hogy L átmegy az $(a, f(a))$ ponton, és $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (beleértve, hogy ez $\exists$) (1).

(ii) $L(x)$ támaszegyenes, ha $L(a) = f(a)$ ($c = f(a) - ma$, L átmegy az $(a, f(a))$ ponton), és $\forall x \in \mathcal{D}_f$ $f(x) \geq L(x)$ (azaz a függvény az L egyenes fölött halad) (1).

a) *Támaszegyenesből* akár több is lehet, ld. pl. az $f(x) := |x|$ az $a = 0$ pontban (1).

Mivel az *érintő* (az érintő m meredeksége) határértékkel van definiálva, az vagy nem létezik (és akkor nincsen érintő sem), vagy létezik, és akkor *egyetlen* lehetséges m értéket határoz meg: így érintő vagy nincsen, vagy csak egy lehet (1).

b) Az $a = 0$ pontban $g(x) := |x|$ példa arra, hogy sok támaszegyenes van, de érintő nincs (1) és $h(x) := x^3$ fv. példa arra, hogy támaszegyenes nincs, de érintő (derivált) van (1).

c) Ha az érintő létezik, akkor az egyértelmű, és az e.a.-on bebizonyítottuk, hogy – feltéve, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *belső* pont! – csak ez az egyetlen $L(x)$ lehet az egyetlen támaszegyenes is (1).

3.) (5 pont) "Minimum-maximum korlátozás": ha $f \in \mathcal{R}(I)$ (Riemann-integrálható) az $I = [a, b]$ korlátos, zárt intervallumon, akkor $\inf_I f \ (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sup_I f \ (b-a)$ (2). ("Gyengébb" formában: ha $m \leq f(x) \leq M$ $(\forall x \in I)$, akkor $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$).

Ennek bizonyítása azon múlik, hogy ez *minden* $S(f, \mathbf{t}, \mathbf{x})$ Riemann-féle integrál-közelítő összegre is mind teljesül (1): u.i. ha $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k$, akkor $\inf_I f \ (b-a) = \inf_I f \sum_{k=0}^n \Delta t_k \leq \sum_{k=0}^n f(x_k) \Delta t_k \ (= S(f, \mathbf{t}, \mathbf{x})) \leq \sum_{k=0}^n \sup_I f \ \Delta t_k = \sup_I f \ (b-a)$ (1).

Ha f Riemann-integrálható, akkor $\int_a^b f$ ezen $S(f, \mathbf{t}, \mathbf{x})$ összegek határértéke, így a *rendőr-elv* miatt a határértékre is teljesülnek ugyanezek az egyenlőtlenségek (1).

4.) (4 pont) A nevező miatt $z \neq 2$ (1). Felszorozva $(z-2)$-vel, $(z-2)(z^2 + 2z + 3) = 2(1 + \overline{z}\frac{z+\overline{z}}{2}) - z - z\overline{z} - \overline{z}^2 = 2 + \overline{z}(z + \overline{z}) - z - \overline{z}(z + \overline{z}) = 2 - z$ (1), tehát $(z-2)(z^2+2z+3) = -z+2$, azaz $z^3 = 8$ (1). A megoldások tehát $\sqrt[3]{8} = 2$ abszolútértékűek és $(z/2)^3 = 1$, tehát $z = 2$ és $z = -1 \pm \sqrt{3}i$. Ebből $z \neq 2$ miatt csak $z = -1 \pm \sqrt{3}i$ a valódi megoldásai az egyenletnek (1).

5.) (4 pont) A $\lambda(x)$ fv. páros, és folytonos mindenütt, ahol $x \neq 0$ (1), és a $0 \in \dot{\mathcal{D}}_f \setminus \mathcal{D}_f$ pontban kell megvizsgálni, hogy a szakadása megszüntethető-e (1). A 0-ban a határértéke létezik, éspedig $\lim_{x \to 0} \lambda(x) = \lim_{y=1/x^2 \to +\infty} \arctan y = \pi/2$ (1). Így a határértékkel értelmezve a kiterjesztést, a $\Lambda(x) := \lambda(x)$ $(x \neq 0)$ & $\Lambda(0) := \pi/2$ fv. folytonos lesz a 0-ban is (1).

6.) (4 pont) a) (2 pont) Legyen $0 < \varepsilon < 1$ tetsz., és $K(> 0)$ olyan, hogy $x \geq K$-ra már $|f(-x)/f(x) - (-1)| < \varepsilon (< 1)$, azaz ($f(x) \neq 0$ és) $f(-x)/f(x) < -1 + \varepsilon < 0$, negatív (1).

Ez azt jelenti, hogy az $I=[-K,K]$ intervallum két végpontjában f értékei közrefogják a 0-t, tehát *Bolzano tétele értelmében* van olyan $z\in I$, amelyre $f(z)=0$ (1).

b) (2 pont) Ha $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, $\deg f=n(\Leftrightarrow a_n\neq 0)$ polinom, akkor $\lim_{x\to\infty} f(-x)/f(x)=\lim_{x\to\infty}(f(-x)/x^n)/(f(x)/x^n)=\lim_{x\to\infty}(f(-x)/x^n)/\lim_{x\to\infty}(f(x)/x^n)=a_n(-1)^n/a_n=(-1)^n$ (1). Tehát f lényegében ptlan $\Leftrightarrow n$ ptlan $\Leftrightarrow f$ páratlan fokú (1).

7.) (6 pont) Legyen $F(a)=-1$, és tekintsük a $(0,-2)$ és $(a,-1)$ fv. pontokon áthaladó húrt (1), aminek egyenlete $H(x)=mx-2$, ahol $m:=\frac{F(a)-F(0)}{a-0}=\frac{-1-(-2)}{a}=1/a$ a húr meredeksége (1). A konvexitás értelmében a húr a 0 és az a x-koordináták közötti I szakaszon a fv. felett, *azon kívül azonban a fv. alatt* kell haladjon (1). Márpedig, mivel a húr nem vízsszintes ($m=1/a\neq 0$), a húr fel fog venni tetszőlegesen nagy pozitív értékeket is (I-n kívül is) (1). Kokrétan pl. már $H(2a)=0$, $2a\notin I$, és már ott is $F(2a)\geq H(2a)=0$; általában $H(na)=n-2$, és $F(na)\geq H(na)=n-2$. Tehát van b, hogy $F(b)\geq 0$, miközben $F(a)=-1<0$, és F *folytonos* is – mert konvex fv. folytonos is (1) – így alkalmazhatjuk *Bolzano tételét*: van olyan c is, amelyre $F(c)=0$ (1).

8.) (6 pont) $\frac{1}{4}I:=\int\frac{e^x+2+3e^{-x}}{4\,\mathrm{ch}^2x}\,dx=\int\frac{e^x+2+3e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx=\int\frac{e^{3x}+2e^{2x}+3e^x}{(e^{2x}+1)^2}\,dx$ (1).
Helyettesítve $y:=e^x$-et, $=\int\frac{y^2+2y+3}{(y^2+1)^2}\,dy=\int\frac{dy}{y^2+1}+\int\frac{2y}{(y^2+1)^2}\,dy+\int\frac{2}{(y^2+1)^2}\,dy$ (1 + 1).
Az első két integrál $\arctan(y)$ és $-\frac{1}{1+y^2}$ (1), míg a harmadikra $y=\mathrm{tg}\,t$ helyettesítés után $\int\frac{2}{(y^2+1)^2}\,dy=\int 2\cos^2 t\,dt=\int(1+\cos(2t))\,dt=t+\frac{1}{2}\sin(2t)=\arctan y+\frac{y}{1+y^2}+C$ (1).

Összevonva és visszahelyettesítve $I=8\arctan(y)+4\frac{y-1}{1+y^2}=8\arctan(e^x)+4\frac{e^x-1}{1+e^{2x}}+C$ (1).
Meg lehet oldani úgy elindulva is, hogy $I=\int\frac{4\mathrm{ch}\,x-2\mathrm{sh}\,x+2}{\mathrm{ch}^2x}\,dx=4\int\frac{dx}{\mathrm{ch}\,x}+\frac{2}{\mathrm{ch}\,x}+2\tanh x$, ahol $\int\frac{dx}{\mathrm{ch}\,x}=\int\frac{2e^xdx}{e^{2x}+1}=2\arctan e^x+C$, és végül ugyanaz jön ki, mert $\tanh x=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$.

9.) (5 pont) $I=\int_0^{\pi/3}\sqrt{h'(x)^2+1}dx$, (1) $I=\int_0^{\pi/3}\sqrt{\mathrm{tg}^2x+1}dx=\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\cos x}dx$ (1), amit a *Weierstrass-féle* $x=2\arctan t$, $t=\mathrm{tg}\,(x/2)$ *helyettesítéssel* meg lehet oldani (1).

Innen $q:=\mathrm{tg}\,(\pi/6)=1/\sqrt{3}$ jelöléssel $I=\int_0^q\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\;\frac{2}{1+t^2}dt=\int_0^q\frac{2}{1-t^2}dt$ (1), azaz $I=\int_0^q\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\,dt=\left[\ln\frac{1-t}{1+t}\right]_0^q=\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$ (1). Úgy is meg lehet oldani, hogy az integrálási határokkal nem törődve primitív fv.t keresünk, majd visszaírjuk az eredeti x változót és a Newton-Leibniz szabályt alkalmazzuk: így $I=\left[\ln\left(\frac{1-\mathrm{tg}\,(x/2)}{1+\mathrm{tg}\,(x/2)}\right)\right]_0^{\pi/3}$, ami ugyanaz.

10.) (4 pont) $A=\int_0^1 2\pi x\sqrt{\mathrm{ch}\,'(x)^2+1}dx=\int_0^1 2\pi x\sqrt{\mathrm{sh}^2(x)^2+1}dx=\int_0^1 2\pi x\;\mathrm{ch}\,x\;dx$ (1+1). Legegyszerűbb parciális integrálással (1) : $\int_0^1 x\;\mathrm{ch}\,(x)\;dx=[x\,\mathrm{sh}\,x]_0^1-\int_0^1\mathrm{sh}\,x\;dx=\mathrm{sh}\,1-[\mathrm{ch}\,x]_0^1=1+\mathrm{sh}\,1-\mathrm{ch}\,1=1-e^{-1}$, $A(H)=2\pi(1-e^{-1})=2\pi\frac{e-1}{e}$ (1).

11.) (5 pont) $M=\int_0^{\pi/2}\cos x\;dx=[\sin x]_0^{\pi/2}=1$ az össz terület (1).
$S_x=\frac{1}{M}\int_0^{\pi/2}x\cos x dx=[x\sin x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x dx=\pi/2-1$ (1+1);
$S_y=\frac{1}{M}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\cos^2x\;dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2x))\;dx=\pi/8$ (1+1).

12.) (5 pont) Ha létezik, akkor $\int_2^\infty\frac{1}{x\log^a x}\;dx:=\lim_{T\to\infty}\int_2^T\frac{1}{x\log^a x}\;dx$ (1).

Így előbb ezt számítjuk ki: $\int_2^T\frac{1}{x\log^a x}\;dx=\int_{\log 2}^{\log T}\frac{1}{y^a}\;dy=[\frac{-1}{a-1}y^{1-a}]_{\log 2}^{\log T}$ (ha $a\neq 1$), (1), míg $a=1$ esetén $=[\log\log x]_2^T=\log\log T-\log\log 2\to\infty$ $(T\to\infty)$, divergens (1).

Ha $a\neq 1$, akkor ha $a>1$, akkor $[\frac{-1}{a-1}y^{1-a}]_{\log 2}^{\log T}\to\frac{1}{a-1}\log^{1-a}2$, azaz konvergens (1); és ha $a<1$, akkor $\log^{1-a}T\to\infty$ miatt divergens az improprius integrál (1).
(Összegezve: az improprius integrál $a>1$-re konvergens, és ekkor $\int_2^\infty\frac{1}{x\log^a x}\;dx=\frac{1}{a-1}\log^{1-a}2$.)