

## Hausaufgaben 4.

### Numerische Reihen

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent, absolut konvergent oder divergent sind:

- |  |  |
|--|--|
| <p>1. <math>\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}</math><br/>(Leibniz-Reihe, bedingt konv.)</p>  | <p>2. <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}</math><br/>(divergent)</p>  |
| <p>3. <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n)^n}{n^n + 1}</math><br/>(absolut konv., Majorant <math>\sum \frac{1}{n^2}</math>, <math>n &gt; 2</math>)</p>   | <p>4. <math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)^{2n}</math><br/>(absolut konv., <math>\sqrt[n]{ a_n } \rightarrow \frac{1}{4}</math>)</p> |
| <p>5. <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}</math><br/>(positive Reihe, <math>\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{2}{e}</math> konv.)</p>   | <p>6. <math>\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n</math><br/>(positive Reihe, <math>\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}</math> konv.)</p>        |
| <p>7. <math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}</math><br/>(absolut konv., <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ a_{n+1} }{ a_n } &lt; 1</math>)</p> | <p>8. <math>\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-4}</math><br/>(divergent, <math>a_n &gt; \frac{1}{n}</math>)</p>  |
| <p>9. <math>\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-5k-10}{10k}\right)^k</math><br/>(absolut konv., <math>\sqrt[n]{ a_n } \rightarrow \frac{1}{2}</math>)</p>   | <p>10. <math>\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+2}}</math><br/>(Leibniz Reihe, bedingt konv.)</p>   |

### Funktionenreihen

Ermitteln Sie das Konvergenzintervall der folgenden Funktionenreihen:

- |   |  |
|---|--|
| <p>1. <math>\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n x</math><br/>(<math>x \neq k\pi</math>, sonst abs.konv.)</p> | <p>2. <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}</math><br/>(abs. konv. <math>-\infty &lt; x &lt; \infty</math>)</p> |
| <p>3. <math>\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx^2}</math><br/>(div.)</p>                                      | <p>4. <math>\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}</math><br/>(<math>0 &lt; x</math>)</p>   |

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n-1)}$$

( $R = 2$ , div. falls  $x = 2$ , bedingt konv. falls  $x = -2$ )

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}, \quad a \neq 0$$

( $R = |a|$ , div. falls  $x = \pm|a|$ )

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$$

(absolut konv. falls  $|x-1| < 2$ , auch für  $x = 3, x = -1$ )

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k4^k}$$

( $R = 4$ )

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} x^n$$

( $R=1$ , für  $|x| = 1$  div.)

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} (x-1)^n$$

(Konvergenzintervall:  $]1 - e^2, 1 + e^2[$ )